Маша Ђорић • Јелена Катић

АНАЛИЗА 3

Уџбеник са збирком решених задатака за информатичаре

Друго издање

Математички факултет
Београд 2021.

Предговор

У писању ове књиге ослонили смо се на предавања и вежбе које смо држали на предмету Анализа 3 за смер Информатика на Математичком факултету у Београду. Анализа 3 је, у својој суштини, базични преглед теорије функција више променљивих уз кратак осврт на методе решавања неких типова диференцијалних једначина. Овај предмет је природни наставак и уопштење обрађених тема диференцирања и интеграције функција једне променљиве. Сличан садржај, али опширнији и са детаљнијим приступом, има предмет Анализа 2 на модулу Математика. Студентима на овим предметима такође може бити користан овај текст, као увод и основа за даље изучавање које ови предмети подразумевају. Сматрамо да ће студентима највише помоћи мноштво решених примера и задатака, као и довољан број задатака за вежбу (са крајњим резултатима) са претходних испитних рокова. Задаци и примери у тексту требало би да објасне дефинисане појмове и тврђења, као и да олакшају даље читање, док су задаци дати на крају сваке главе замишљени као припрема студента за писмени испит.

Садржај књиге подељен је на седам глава. Првих пет глава представља градиво предмета, при чему се свака глава састоји од теоријског дела, решених задатака и задатака за самосталан рад. Решења задатака се налазе у седмој глави, с тим да су задаци из поглавља „решени задаци" поступно и детаљно урађени, а за задатке из поглавља „задаци за самосталан рад" дати су крајњи резултати. У шестој глави су доказане теореме чији докази нису обавезни за разумевање градива као целине и могу бити изазов за читаоца.

Прве две главе посвећене су функцијама више променљивих и диференцијалном рачуну. Метричка својства простора $\mathbb{R}$ пренесена су на простор $\mathbb{R}^n$ и формулисане су познате теореме са курсева Анализа 1 и 2 у општијој ситуацији. Поново говоримо о низовима и непрекидности, али уопштавање појма диференцијабилности захтева озбиљнији приступ и подсећање на појам линеарног оператора. Говоримо о довољним условима диференцијабилности, односу непрекидности и диференцијабилности и први пут се

срећемо са изузетно важним оператором ∇ – за почетак са његовим најједноставнијим дејством, градијентом функције. Са функција прелазимо на пресликавања са вредностима у $\mathbb{R}^n$. Као и у случају функција једне променљиве, непрекидност се уводи непосредно, док дефинисање диференцијабилности функција више променљивих и вектор-функција доводи до увођења разних нових појмова. Помоћу Јакобијеве матрице лако можемо описати извод сложене вектор-функције више променљивих. Пре него што пређемо на изводе вишег реда, бавимо се геометријским погледом на појам диференцијабилности. Геометријска интерпретација извода функције једне променљиве јесте коефицијент правца тангенте на график функције у одговарајућој тачки. У случају функција више променљивих, њен градијент биће вектор нормале тангенте на линије нивоа ($f(x, y) = c$) у случају две променљиве, односно тангентне равни на површи нивоа у случају три променљиве ($f(x, y, z) = c$). Након увођења Тејлоровог полинома, прелазимо на важну теорију локалних екстремума. Дефинишемо квадратну форму, и на том језику формулишемо критеријуме када је стационарна тачка тачка локалног екстремума, а када не. Такође се упознајемо са важном техником Лагранжевих множилаца, помоћу које можемо одредити локалне екстремуме функције на „правилном” подскупу домена.

У трећој глави дефинишемо интеграл функције две и три променљиве, тзв. двоструки и троструки интеграл, који су природно уопштење интеграла функције једне променљиве. Главну технику за израчунавање вишеструких интеграла даје нам Фубинијева теорема, која успоставља везу између вишеструких и поновљених једноструких интеграла. Ову теорему формулишемо у случају непрекидних функција, и строг доказ дајемо у Додатку. Више пажње посвећујемо разјашњавању и интуитивном схватању ове теореме, ослањајући се на Кавалијеријев принцип. Важна техника за израчунавање интеграла је, као што већ знамо, смена променљиве. Теорему о смени променљиве у вишеструком интегралу доказујемо само у специјалним случајевима поларне, цилиндричне и сферне смене, сматрајући да је за потребе овог курса то довољно.

Четврту главу почињемо дефинисањем криволинијског интеграла функције, као још једног уопштења одређеног интеграла. Овог пута сегмент $[a, b]$ нећемо заменити дводимензионалним скупом, већ кривом. Након тога уводимо криволинијски интеграл векторског поља и говоримо о оријентацији криве. Формулишемо Гринову теорему, која доводи у везу криволинијски и двоструки интеграл, односно извод и границу скупа – баш као Њутн–Лајбницова формула за одређени интеграл. Следи излагање о конзервативним

векторским пољима, независности интеграла од путање по којој интегралимо и условима под којима се то дешава. Поглавље настављамо увођењем површинског интеграла, најпре функције, а затим векторског поља. Поново разматрамо појам оријентације, овог пута површи, па говоримо о јединичној нормали на површ. Поглавље завршавамо повратком на оператор ∇ и Стоксовом и Гаусовом формулом, које повезују површински интеграл са криволинијским и троструким интегралом, респективно. Ове две теореме, као и Гринова, заправо су специјални случајеви једне дубоке и важне теореме, која успоставља дуалност између границе скупа (тополошког појма), с једне стране, оператора ∇ (аналитичког појма), с друге. У питању је општа Стоксова теорема, која излази из оквира овог курса, а јесте корен многих студентима познатих теорема.

Тема пете главе су диференцијалне једначине, односно једначине у којима фигуришу непозната функција и њени изводи. Већину диференцијалних једначина није могуће експлицитно решити, па издвајамо неколико основних типова диференцијалних једначина првог реда и представљамо технике за њихово решавање. Такође говоримо о линеарној диференцијалној једначини вишег реда која се може решити познатим алгоритмом у великом броју случајева.

Пре свега желимо да захвалимо рецензентима Тамари Коледин и Браниславу Првуловићу, као и лектору Славици Коледин, који су педантно и посвећено прочитали рукопис и који су својим примедбама допринели да се из текста уклоне многе грешке и недостаци, и тиме знатно поправили квалитет излагања. Током техничке обраде текста веома нам је помогао Славко Моцоња. Посебну захвалност дугујемо Тијани Шукиловић која је имала стрпљења и воље да нацрта све слике, за које сматрамо да много доприносе лакшем читању и разумевању текста. Такође се захваљујемо Милици Јовалекић и Вукашину Стојисављевићу, који су, као асистенти на предмету, дали свој допринос у одабиру задатака за вежбу, и младим колегама Филипу Живановићу, Душану Јоксимовићу и Младену Зекићу на указивању на грешке и пропусте у тексту. Свесни смо да и поред велике пажње коју смо посветили писању овог уџбеника, одређени број грешака сигурно постоји. Бићемо захвални сваком читаоцу који нам укаже на пропусте.

Садржај

ГЛАВА 1

Функције више променљивих

На предмету Анализа 1 проучавали смо низове реалних бројева и нека својства функције једне реалне променљиве (непрекидност, лимес, диференцијабилност). У овој глави уопштићемо неке од ових појмова (лимес и непрекидност) на случај низова у $\mathbb{R}^n$ и функција више реалних променљивих. Саме дефиниције нових појмова не разликују се много од оних које већ знамо ако апсолутну вредност разлике $|x - y|$ у $\mathbb{R}$ схватимо као растојање $d(x, y)$ између два реална броја. Видећемо и да својства лимеса и непрекидности важе и у случају функција више променљивих.

У неким тврђењима ћемо радити у општем случају, са уређеним n-торкама, а у неким, ако сматрамо да ће то поједноставити запис и допринети разумевању, са уређеним паровима или тројкама. Саветујемо читаоцу да тврђења која су дата у општем случају ($\mathbb{R}^n$) формулише и замисли у конкретном ($n = 1, 2, 3$), она која су дата за уређене парове формулише за уређене тројке и обратно (ово је и садржај неких задатака у тексту).

У конкретним задацима, служићемо се старим триковима када хоћемо да покажемо да неки лимес не постоји или да нека функција није непрекидна (помоћу карактеризације лимеса и непрекидности преко низова), док ћемо, у случају да желимо да покажемо да неки (неочигледан) лимес постоји, користити једноставне процене, и често прелазити на поларне координате $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$. Прелазак на поларне координате у задацима у овој глави можемо да схватимо као смену променљиве у лимесу. Са поларним координатама ћемо се сусрести и касније у књизи, код двоструких интеграла.

Што се тиче пресликавања која имају вредности у $\mathbb{R}^k$, видећемо да се сва својства преносе на координатне функције, и зато ова пресликавања остављамо за крај.

ГЛАВА 2

Диференцијални рачун функција више променљивих

У овој глави бавимо се изводима функција више променљивих. Сада то више није праволинијско уопштење као што је био случај са лимесима. Упознаћемо се са парцијалним изводима, као нечим најближим изводу који познајемо из Анализе 1, али и са (новим) концептом извода као линеарног пресликавања које се мења од тачке до тачке. Изводимо правила за извод композиције и инверзне функције, која, иако уопштења случаја једне променљиве, овде гледамо у новом светлу композиције и инверза линеарних пресликавања.

Упознаћемо се са применама диференцијалног рачуна у геометрији – тангентама на криве и тангентним равнима на површ. Помоћу извода вишег реда и Тејлоровог полинома научићемо да апроксимирамо функције више променљивих полиномима више променљивих. Видећемо како да одредимо екстремуме функција више променљивих, односно, који су потребни и довољни услови да би функција више променљивих у некој тачки имала локални минимум или максимум. И на крају, научићемо како да нађемо условне локалне екстремуме, односно максимуме и минимуме функције у ситуацијама у којима променљиве нису независне, већ везане. Ово су проблеми оптимизације, како да нађемо најбољу вредност (највећу или најмању, у зависности од ситуације), при одређеним условима које морамо да поштујемо. Метод који ћемо учити је метод Лагранжевих[1] множилаца.

[1] Joseph-Louis Lagrange (1736–1813), италијански математичар и астроном.

ГЛАВА 3

Двоструки и троструки интеграли

У Анализи 2 смо дефинисали интеграл функције на интервалу $[a, b]$ као граничну вредност збира површина малих правоугаоника, који су за основицу имали $\Delta x_j = x_j - x_{j-1}$, а за висину вредност $f(\xi_j)$ функције f у некој тачки $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$. Двоструки и троструки интеграл ћемо дефинисати слично. Двоструки интеграл ће бити дефинисан за функције две променљиве, а троструки за функције три променљиве. Дужину основице малог правоугаоника који је учествовао у дефиницији једноструког интеграла заменићемо површином малог правоугаоника у случају двоструког, тј. запремином малог квадра у случају троструког интеграла. Затим ћемо формирати итегралне суме, и, као у Анализи 2, интеграл дефинисати као лимес интегралних сума у простору подела.

Оно што је ново у односу на интеграл у $\mathbb{R}$ јесте класа скупова по којима интегралимо функције. У $\mathbb{R}$ смо интегралили улгавном само по интервалима, док у случају функција више променљивих интегралимо пре свега по првим уопштењима интервала (а то су правоугаоници и квадри), али и по много већој класи скупова, разних облика.

Геометријска интерпретација двоструког интеграла слична је као у случају једноструког: интеграл функције која је константна и једнака јединици јесте површина области по којој интегралимо (у случају једне променљиве била је дужина интервала), а интеграл позитивне функције јесте запремина области у простору испод графика функције.

Као у случају функције једне променљиве, интеграл ретко рачунамо по дефиницији. У случају вишеструких интеграла, први алат за рачунање нам је Фубинијева теорема (која нема свој аналогон у Анализи 2). Фубинијева теорема своди вишеструки интеграл на поновљени, који умемо да израчунамо помоћу техника из Анализе 2.

ГЛАВА 4

Криволинијски и површински интеграли

У овој глави ћемо уопштити појам једноструког и двоструког интеграла тако што ћемо проширити класу скупова по којој је могуће интегралити. То више неће бити подскупови реалне осе или равни (дакле равни објекти), већ и „криви" објекти, односно криве и површи. Видећемо да у овом случају можемо да интегралимо функције као и раније, али и векторска поља[1], и да су у оба случаја ови појмови уопштења интеграла које већ познајемо.

У случају функције, дефиниција интеграла личи на оне које знамо одраније: интегралне суме су збир вредности функција у појединим тачкама помноженим са мером „малих" скупова (дужином у случају криволинијског, односно површином у случају површинског интеграла), а интеграл је лимес у простору подела. Као и раније, у конкретним ситуацијама интеграле не рачунамо по дефиницији, већ изводимо формуле које своде криволинијске на обичне, а површинске на двоструке интеграле.

Векторска поља дуж кривих (површи) у $\mathbb{R}^3$ су пресликавања дефинисана на кривама (површима) са вредностима у $\mathbb{R}^3$. О њима можемо размишљати као о стрелицама „закаченим" за дату криву, односно површ (видети слику 4.1). Криволинијски интеграл векторског поља дуж криве дефинише се као криволинијски интеграл функције која је тангентна компонента датог векторског поља. Зато се криволинијски интеграл векторског поља дуж затворене криве назива и *циркулација* векторског поља, јер мери количину циркулације поља око криве. Површински интеграл векторског поља дуж дате површи дефинише се као површински интеграл функције која представља нормалну компоненту датог поља. Дакле, површински интеграл векторског поља мери проток поља **кроз** површ. Зато се он назива и *флукс* или *проток* векторског поља дуж дате површи.

[1]Видети напомену 4.2.

ГЛАВА 5

Диференцијалне једначине

Диференцијална једначина је једначина у којој је непозната функција f, а у којој се појављују изводи функције f. Ако је f функција једне променљиве, тада се диференцијална једначина назива *обичном*, а ако је f функција више променљивих (па се у једначини појављују парцијални изводи), тада се једначина зове *парцијалном* диференцијалном једначином. Нпр., једначина:

$$F(x, x', t) = mx''$$

(Други Њутнов закон), у којој је $x = x(t)$ непозната функција, јесте обична диференцијална, а једначина у којој је $u = u(x, y, z, t)$ непозната функција

$$u'_t = a(u''_{xx} + u''_{yy} + u''_{zz})$$

(једначина провођења топлоте) јесте парцијална диференцијална једначина. *Ред* диференцијалне једначине је ред највећег извода који се у њој појављује. Тако је ред диференцијалних једначина из наведених примера два. Решити диференцијалну једначину значи одредити све функције f које је задовољавају. Већину диференцијалних једначина тешко је или немогуће решити и теорија диференцијалних једначина се бави испитивањем услова за постојање и јединственост решења, особинама решења, као и својствима скупа решења датих једначина.

Ми ћемо се овде бавити само обичним диференцијалним једначинама, и то неким најједноставнијим облицима који могу непосредно да се реше.

Пре свега ћемо описати неколико облика диференцијалних једначина првог реда и технике за њихово решавање. Потом ћемо се бавити линеарном једначином вишег реда са константним коефицијентима и комплетно описати поступак налажења свих њених решења, у хомогеном и нехомогеном случају.

ГЛАВА 6

Додатак

6.1. Додатак уз Главу 1

Дефиниција 6.1. Нека је V векторски простор над пољем $\mathbb{R}$. *Скаларни производ* $\cdot$ је функција дефинисана на скупу $V \times V$ (дакле променљиве су уређени парови $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$), са вредностима у $\mathbb{R}$, која има следећа својства:

(i) $(\lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2) \cdot \mathbf{v} = \lambda_1(\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v}) + \lambda_2(\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v})$, за све скаларе λ_1 и λ_2 из $\mathbb{R}$ (линеарност);

(ii) $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ (симетричност);

(iii) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geqslant 0$ (позитивност);

(iv) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$ ако и само ако је $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, где је $\mathbf{0}$ нула-вектор (недегенерисаност).

$\Diamond$

Тврђење 6.2. За сваки скаларни производ важи

$$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leqslant \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}\,\sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \tag{77}$$

(Коши–Шварцова неједнакост).

Доказ. Посматрајмо квадратну функцију

$$\varphi(x) := (x\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot (x\mathbf{u} + \mathbf{v}) = x^2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + 2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})x + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}.$$

Из аксиоме позитивности скаларног производа следи да је $\varphi(x) \geqslant 0$ за свако $x \in \mathbb{R}$, а то је, за квадратну функцију могуће само ако је дискриминанта једначине $D = b^2 - 4ac \leqslant 0$. У нашем случају то значи:

$$4(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 - 4(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \leqslant 0,$$

одакле, кад пребацимо $4(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u})(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})$ на десну страну, поделимо са 4 и коренујемо обе стране, добијамо неједнакост (77). $\square$

Дефиниција 6.3. *Норма* је функција дефинисана на векторском простору, са вредностима у $\mathbb{R}$, која има следећа својства:

(i) $\|\mathbf{u}\| \geqslant 0$ (позитивност);
(ii) $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| \leqslant \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ (неједнакост троугла);
(iii) $\|\lambda\mathbf{u}\| = |\lambda|\|\mathbf{u}\|$ за сваки скалар λ;
(iv) $\|\mathbf{u}\| = 0$ ако и само ако је $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ (недегенерисаност).

Векторски простор са нормом зове се *нормиран (векторски) простор.* $\Diamond$

Дефиниција 6.4. Нека је M произвољан скуп. *Метрика* на M је функција d дефинисана на скупу $M\times M$ (дакле, на уређеним паровима (a,b), где су $a,b\in M$), са вредностима у $\mathbb{R}$, која задовољава следећа својства:

(i) $d(a,b) \geqslant 0$ (позитивност);
(ii) $d(a,b) = d(b,a)$ (симетричност);
(iii) $d(a,c) \leqslant d(a,b) + d(b,c)$ (неједнакост троугла);
(iv) $d(a,b) = 0$ ако и само ако је $a = b$ (недегенерисаност).

Скуп на коме је задата метрика зове се *метрички простор.* $\Diamond$

Приметимо да се норма дефинише на векторским просторима, док се у аксиомама метрике не спомињу структуре векторског простора (сабирање и множење скаларом). Метрика може да се дефинише и на скупу који није векторски простор, а, с друге стране, сваки нормиран простор јесте и метрички. Зато је појам метричког простора општији од појма нормираног простора. Слично, како сваки векторски простор са скаларним производом задаје норму, а није свака норма настала од скаларног производа, то је појам норме општији од појма скаларног производа.

Доказ тачке 1) тврђења 1.23.

Нека је

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = A \in \mathbb{R} \quad \text{и} \quad \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} g(\mathbf{x}) = B \in \mathbb{R}.$$

Нека је $\varepsilon > 0$ дато, и нека су δ_1 и δ_2 изабрани тако да важи:

$$0 < d(\mathbf{x},\mathbf{x}_0) < \delta_1 \Rightarrow |f(\mathbf{x}) - A| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad 0 < d(\mathbf{x},\mathbf{x}_0) < \delta_2 \Rightarrow |g(\mathbf{x}) - B| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Нека је $\delta = \min\{\delta_1,\delta_2\}$ и $0 < d(\mathbf{x},\mathbf{x}_0) < \delta$. Како је

$$|f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}) - (A+B)| \leqslant |f(\mathbf{x}) - A| + |g(\mathbf{x}) - B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

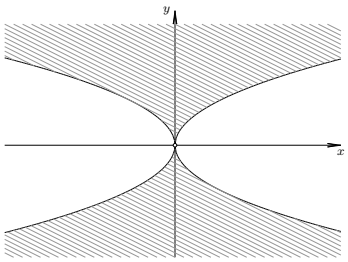
то је $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0}(f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})) = A + B$. $\square$

ГЛАВА 7

Решења задатака

7.1. Функције више променљивих

1. а) Због области дефинисаности логаритамске функције мора бити $1 - x^2 - y^2 - z^2 > 0$, тј. $x^2 + y^2 + z^2 < 1$. Још би требало узети у обзир да је функција задата као разломак, односно $\ln(1 - x^2 - y^2 - z^2) \neq 0$. Одавде добијамо да је $x^2 + y^2 + z^2 \neq 0$. Коначно, домен дате функције је унутрашњост јединичне сфере са центром у координатном почетку, не укључујући координатни почетак.
б) Израз под кореном мора бити ненегативан, тј. $x + y + z \geqslant 0$. Дакле, домен је полупростор чија је граница раван $x + y + z = 0$.
в) Због корене функције која учествује у дефиницији функције f, и још је у имениоцу, мора бити $x^2 + y^2 - a^2 > 0$, односно $x^2 + y^2 > a^2$. Тражени домен је спољашњост круга са центром у $(0, 0)$ полупречника a, не укључујући саму кружницу.
г) Функција f је добро дефинисана ако је именилац различит од нуле, тј. $xy \neq 0$. Домен је цела раван без координатних оса.
д) Функција $\arcsin(t)$ дефинисана је за $-1 \leqslant t \leqslant 1$. Дакле, $-1 \leqslant \dfrac{x}{y^2} \leqslant 1$, односно $-y^2 \leqslant x \leqslant y^2$. Још би требало одбацити тачке чија је друга координата једнака нули, јер је израз $\dfrac{x}{y^2}$ добро дефинисан само за $y \neq 0$. Домен је приказан на слици 7.1.



Слика 7.1: уз задатак 1.д)

✓

2. Тражени лимеси су:

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{x-y}{x+y}=\lim_{x\to 0}1=1,$$
$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{x-y}{x+y}=\lim_{y\to 0}(-1)=-1.$$

Довољно је наћи два низа у $\mathbb{R}^2$ који теже ка тачки $(0,0)$, а да њихове слике при пресликавању f не теже ка истим вредностима. У том случају двојни лимес неће постојати. Узмимо следећа два низа:

$$(x_n,y_n)=\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\to(0,0),$$
$$(z_n,d_n)=\left(\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right)\to(0,0).$$

Добијамо да је $f(x_n,y_n)=f(\frac{1}{n},\frac{1}{n})=0$, а $f(z_n,d_n)=f(\frac{1}{n},\frac{2}{n})=-\frac{1}{3}$, па лимес не постоји. ✓

3. Поновљени лимеси су заиста једнаки, јер је:

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=\lim_{x\to 0}0=0,$$
$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=\lim_{y\to 0}0=0.$$

Као и у претходном задатку, погодно одаберимо низове у $\mathbb{R}^2$. Нека је:

$$(x_n,y_n)=\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\to(0,0),$$
$$(z_n,d_n)=\left(\frac{1}{n},-\frac{1}{n}\right)\to(0,0).$$

Тада је $f(x_n, y_n) = f(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = 1$, а $f(z_n, d_n) = f(\frac{1}{n}, -\frac{1}{n}) = \frac{\frac{1}{n^4}}{\frac{1}{n^4} + \frac{4n^2}{n^4}} \to 0$, па двојни лимес не постоји. ✓

4. Важи да је

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\left(x + y\sin\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0} x = 0.$$

Приметимо да $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$ не постоји, јер не постоји ни $\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$, за $y \neq 0$. То, опет, можемо показати преко низова, али ће то сада бити низови у $\mathbb{R}$ (функцију $f(x,y)$ посматрамо као функцију од x). Нека је $x_n = \dfrac{1}{n\pi}$. Тада је

$$f(x_n, y) = \frac{1}{n\pi} + y \cdot 0 \to 0.$$

Узмимо сада $y_n = \dfrac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$. Тада је

$$f(y_n, y) = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}} + y \cdot 1 \to y,$$

па заиста не постоји $\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$.

Постојање двојног лимеса доказаћемо уз помоћ теореме „о два полицајца". Наиме, важи следећи низ неједнакости:

$$0 \leqslant \left|x + y\sin\frac{1}{x}\right| \leqslant |x| + |y|,$$

па коначан закључак изводимо на основу тога што $|x| + |y| \to 0$ када $(x,y) \to (0,0)$. (Користили смо неједнакост троугла, као и $|\sin\frac{1}{x}| \leqslant 1$.) ✓

5. Ове полуправе можемо погодно описати следећим једначинама (преко поларних координата):

$$x = r\cos\varphi,$$
$$y = r\sin\varphi,$$

за фиксирано φ. Након „увођења смене", добијамо

$$f(x,y) = f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = \frac{r^2\cos^2\varphi}{e^{r^2\cos^2\varphi - r\sin\varphi}}.$$

Добијену функцију посматрамо као функцију једне променљиве r (јер је φ фиксирано) и тражимо њен лимес када $r \to \infty$.

Ако је $\cos^2\varphi \neq 0$, онда је тражени лимес облика $\dfrac{\infty}{\infty}$, па можемо применити Лопиталово правило (два пута). Након друге примене добићемо да је тражени лимес једнак нули.
Ако је $\cos^2\varphi = 0$, тј. $\varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ (полуправе одређене y-осом), онда је $f \equiv 0$. И у овом случају је тражени лимес тривијално једнак нули. ✓

6. Функција f није дефинисана на правој $y = x$ (јер је тада именилац једнак нули), а ван те праве је непрекидна као композиција непрекидних функција. Дакле, испитујемо да ли се функција може додефинисати да буде непрекидна у тачкама облика (x_0, x_0), за $x_0 \in \mathbb{R}$. Како је

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,x_0)} \frac{x-y}{x^3-y^3} = \lim_{(x,y)\to(x_0,x_0)} \frac{1}{x^2+xy+y^2} = \frac{1}{3x_0^2},$$

за $x_0 \neq 0$ функцију f можемо додефинисати да буде непрекидна:

$$f(x_0, x_0) := \frac{1}{3x_0^2}.$$

Ипак,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{x^2+xy+y^2} = +\infty,$$

па се дата функција не може додефинисати тако да буде непрекидна на целом $\mathbb{R}^2$. ✓

7. Доказаћемо да је дата функција непрекидна по променљивој x, а слично се ради и за променљиву y. Задатак је еквивалентан испитивању да ли за произвољно $x_0 \in \mathbb{R}$ важи једнакост:

$$\lim_{x\to x_0} f(x,y) = f(x_0, y).$$

Разликујемо неколико случајева:

1° $x_0 \neq 0$, $y \neq 0$:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{2xy}{x^2+y^2} = \frac{2x_0 y}{x_0^2+y^2} = f(x_0, y);$$

2° $x_0 \neq 0$, $y = 0$:

$$\lim_{x\to x_0} f(x,0) = \lim_{x\to x_0} 0 = 0 = f(x_0, 0);$$

3° $x_0 = 0$, $y \neq 0$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2xy}{x^2+y^2} = \frac{0}{y^2} = 0 = f(0, y);$$

4° $x_0 = 0$, $y = 0$:

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} 0 = 0 = f(0,0).$$

Дата функција је непрекидна у свим тачкама осим у $(0,0)$ као композиција непрекидних. За низ $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \to (0,0)$ важи да $f(x_n, y_n) \to 1 \neq 0 = f(0,0)$, па функција f није непрекидна по (x,y). ✓

8. Непрекидност функције f дуж сваке полуправе са теменом у координатном почетку еквивалентна је са:

$$\lim_{r\to 0} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = \lim_{r\to 0} \frac{r\cos^2\varphi\sin\varphi}{r^2\cos^4\varphi + \sin^2\varphi} = 0 = f(0,0), \text{ за свако } \varphi.$$

Ако је $\sin\varphi \neq 0$, последњи лимес је облика $\dfrac{0}{0+\sin^2\varphi}$, што је једнако нули. Ако је $\sin\varphi = 0$, онда је $f \equiv 0$, па је тражени лимес свакако једнак нули. Закључујемо да је f непрекидна дуж свих ових полуправих. Међутим, функција f није непрекидна у $(0,0)$, јер ако узмемо низ $(x_n, y_n) = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}) \to (0,0)$, видимо да је $f(x_n, y_n) \to \dfrac{1}{2} \neq 0$. ✓

9. Дата функција је непрекидна у свим тачкама као композиција непрекидних осим можда у тачки $(0,0)$. Важи следећи низ неједнакости (користимо неједнакост троугла, $\dfrac{x^2}{x^2+y^2} \leqslant 1$ и $\dfrac{y^2}{x^2+y^2} \leqslant 1$):

$$0 \leqslant \left|\frac{2x^2y + y^3}{x^2+y^2}\right| \leqslant \frac{2x^2|y|}{x^2+y^2} + \frac{y^2|y|}{x^2+y^2} \leqslant 3|y|,$$

што тежи нули када $(x,y) \to (0,0)$. Закључујемо да је $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$, па функција f јесте непрекидна и у тачки $(0,0)$. ✓

10. $F(x,y,z) = (xy+1, x^2+5, z, 11, z^3)$, а ненегативна је $f_2(x,y,z) = x^2+5$. ✓ **11.** Домен је скуп строго испод праве $y = x$, а строго изнад параболе $y = -x^2$. Постоји бесконачно много таквих тачака, на пример $A(1+e^2, 1)$. Тражени лимес је једнак нули. ✓ **12.** Домен је спољашњост јединичног круга у горњој полуравни, не укључујући кружницу. Није компактан (није ни затворен, ни ограничен). Тражени лимес је једнак $+\infty$. ✓ **13.** У делу а) јесте непрекидна као количник непрекидних (тачка $(-1,-4)$ не припада датом скупу). Дата функција није непрекидна на целом $\mathbb{R}^2$. ✓

Индекс