Мирослава Антић

ДИФЕРЕНЦИЈАЛНА ГЕОМЕТРИЈА МНОГОСТРУКОСТИ

Математички факултет
Београд, 2015. године

Садржај

f^*E који задаје диференцијабилну структуру у којој је $f^*\pi$ диференцијабилно, а пресликавања g_p су дифеоморфизми.

Нека је $Y \in \mathfrak{C}(f^*E)$. Тада Y можемо идентификовати са диференцијабилним пресликавањем $Y : N \to E$ таквим да је $Y(p) \in \pi^{-1}(f(p))$. Ако сечења $X_1, \ldots, X_k$ чине локални покретни репер на M у околини U тачке $f(p)$, онда је

$$Y(p_1) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i(p_1) X_i(f(p_1)), p_1 \in f^{-1}(U),$$
$$Y = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \cdot X_i \circ f,$$

где је $X_i \circ f \in \mathfrak{C}(f^*E)$, $\alpha_i \in \mathcal{F}(N)$. Ипак, Y не мора бити облика $X \circ f$, за неко $X \in \mathfrak{C}(E)$. На пример, ако је пресликавање f константно, $f \equiv q$, сечење дато са

$$Y(p) = x_1(p) \cdot X_1 \circ f(p) = x_1(p) X_1(q),$$

где је x_1 прва координатна функција у околини тачке p, није константно. $\diamond$

2.6 Задаци

1. Ако је $U \subset \mathbb{R}^n$ отворена област, онда је TU тривијално раслојење. Доказати.

2. На сфери $\mathbb{S}^2$ постоји глатко векторско поље које је нула у тачно једној тачки. Доказати.

3. Наћи на сфери $\mathbb{S}^2$ ковекторско поље које је нула у тачно једној тачки.

4. Производ две паралелизабилне многострукости је паралелизабилна многострукост. Показати.

5. Конструисати један глобални покретни репер на торусу $\mathbb{T}^2$.

6. Доказати да је котангентно раслојење n-димензионе диференцијабилне многострукости $2n$-димензиона многострукост.

7. Две базе тангентног простора многострукости су исте оријентације, уколико је детерминанта преласка са једне базе у другу позитивна. Овим је задата релација еквиваленције међу базама једног тангентног простора са две класе. Одабир класе оријентације је непрекидан у тачки p ако постоји околина те тачке U_p

и локално дефинисан покретни репер $X_1, \ldots, X_n$ у околини U_p такав да је за свако $q \in U_p$ један представник одабране класе еквиваленције $X_{1q}, \ldots, X_{nq}$.

Показати да ова дефиниција не зависи од избора покретног репера који задаје дату оријентацију у тачки p и да је многострукост оријентабилна ако и само ако постоји избор класе оријентације на многострукости који непрекидно зависи од тачака многострукости.

8. На многострукости $\mathbb{R}^2$ дата су векторска поља $X = xy\frac{\partial}{\partial x}$ и $Y = y\frac{\partial}{\partial y}$. Наћи $[X, Y]$.

9. На многострукости M димензије три, покривене локалном картом (M, ϕ) са координатним функцијама x, y, z, дата су векторска поља $X = 2x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + 2z^3\frac{\partial}{\partial z}$ и $Y = 2xy\frac{\partial}{\partial x} + y^2\frac{\partial}{\partial y} + 2yz\frac{\partial}{\partial z}$. Наћи $[X, Y]$.

10. На простору $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ дата су векторска поља $X = -(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}\right)$ и
а) $Y = \frac{\partial}{\partial y}$
б) $Y = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$.
Израчунати $[X, Y]$.

11. Доказати формулу из Примера 2.5.

12. Нека је $\mathcal{M} \simeq \mathbb{R}^{n^2}$ простор n-димензионих реалних матрица. Векторско поље V_a на $\mathcal{M}$ дефинисано је са
а) $V_a(x) = a \cdot x$,
б) $V_a(x) = ax - xa, \;\; a, x \in \mathcal{M}$.
Израчунати $[V_a, V_b]$.

13. Наћи подскуп простора $\mathbb{R}^2$, са координатним функцијама x_1, x_2, на коме су ковекторска поља $\sigma_1 = x_1dx_1 + x_2dx_2$ и $\sigma_2 = x_2dx_1 + x_1dx_2$ линеарно независна и пронаћи на том скупу покретни репер векторских поља $\{X_1, X_2\}$ такав да је $\sigma_i(X_j) = \delta_{ij}, i, j \in \{1, 2\}$.

14. Нека је функција $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ дата у локалним координатама са $f(x, y, z) = (x^2y, y\sin z) = (u, v)$. На простору $\mathbb{R}^2$ дато је ковекторско поље $\sigma = udv + vdu$. Одредити $df^*(\sigma)$.

15. Извести формулу из Примера 2.16.

16. M је диференцијабилна многострукост и $f \in \mathcal{F}(M)$. Израчунати df.
а) $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > 0\}$, $f(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$.

б) $M = \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$, f je z-координатна функција.
в) $M = \mathbb{R}^n$, $f(x) = \|x\|^2$.

17. Показати да се тангентно раслојење $T\mathbb{S}^1$ јединичног круга $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$ може записати у облику

$$\{v(\varphi, t) = (\cos\varphi, \sin\varphi, -t\sin\varphi, t\cos\varphi) \mid t \in \mathbb{R}, \varphi \in [0, 2\pi)\}.$$

Доказати да је $T\mathbb{S}^1$ хомеоморфно цилиндру.

18. Нека су M и N диференцијабилне многострукости, $\pi_M : M \times N \to M$и $\pi_N : M \times N \to N$ канонске пројекције, а $d\pi_M : T(M \times N) \to TM$ и $d\pi_N : T(M \times N) \to TN$ њима индукована пресликавања тангентних раслојења. Показати да је пресликавање $d\pi_M \times d\pi_N : T(M \times N) \to TM \times TN$ дифеоморфизам, видети Пример 1.33.

19. **(Дуал векторског раслојења)** Нека је $\pi : E \to M$ векторско раслојење са влакнима изоморфним векторском простору V и нека је V^* дуал простора V. Показати да постоји векторско раслојење $\pi^* : E^* \to M$ са влакнима изоморфним V^* такво да $\forall p \in M$ важи да је $(\pi^*)^{-1}(p)$ дуалан $\pi^{-1}(p)$.

20. Доказати да не постоји сечење линијског раслојења над $\mathbb{RP}^n$ (видети Пример 2.20), које ни у једној тачки није нула.

21. Показати да је линијско раслојење над $\mathbb{RP}^1$ изоморфно Мебијусовој траци.

22. Доказати тврђења из Примедбе 2.22.

Чињеница да неконстантна кривина не одређује многострукост у дводимензионом случају, када је секциона кривина функција тачака многострукости, није изненађујућа. Са повећањем димензије многострукости повећава се и количина информација коју дају секционе кривине.

Ако је $f : M \to N$ дифеоморфизам такав да су, за све $p \in M$ и дводимензионе равни $\Pi_p \subset T_pM$ секционе кривине равни Π_p и $df_p(\Pi_p)$ једнаке кажемо да f **„чува“ кривину**.

Нагласили смо да свака изометрија „чува“ кривину. Ипак, пресликавање f не мора бити изометрија, рецимо, пример су многострукости константних секционих кривина, где и неизометрични дифеоморфизми чувају кривину. Међутим, важи ([27], [37]) следећа теорема, која утврђује одређеност многострукости њиховом кривином, а коју наводимо без доказа.

Теорема 24 *Нека је $f : M \to N$ дифеоморфизам који чува кривину многострукости димензије $n \geq 4$. Нека је A скуп тачака p таквих да су све секционе кривине равни Π_p међу собом једнаке.*[48] *Ако је затворење $\overline{M \setminus A} = M$ онда је f изометрија.*

5.7 Задаци

1. Показати да је метрика на простору $\mathcal{M}_n$ квадратних n-димензионих матрица наслеђена из простора $\mathbb{R}^{n^2}$ дата са $\langle A, B\rangle = tr(A^tB), A, B \in T_p\mathcal{M}_n, \forall p \in \mathcal{M}_n$.

2. Показати да је стереографска пројекција $\phi_N : \mathbb{S}^m \setminus \{(0, \dots, 0, 1)\} \to \mathbb{R}^m$ конформно пресликавање.

3. Наћи метрику на простору $\mathbb{R}^m$ у којој је стереографска пројекција изометрија. Упоредити са Примером 5.5.

4. Показати да су пресликавања $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}, a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad-bc = 1$, изометрије хиперболичке полуравни. Шта представљају пресликавања f_θ дата са $f_\theta(z) = \frac{\sin\theta z+\cos\theta}{-\cos\theta z+\sin\theta}$?

5. Дата је површ $F(u, v) = (f(u, v), g(u, v))$ где су f и g диференцијабилне функције $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Показати да је пресликавање $F : \mathbb{R}^2 \to F(\mathbb{R}^2)$ конформно ако и само ако је $f'_u = g'_v, f'_v = -g'_u$ или $f'_u = -g'_v, f'_v = g'_u$. Први пар једначина називамо **Коши**[49]**-Римановим** једначинама. Ова два пара једначина имплицирају да је свако конформно пресликавање равни холоморфно или анти-холоморфно пресликавање.

[48] Такве тачке се називају изотропним.

[49] Augustin Louis Cauchy (1789.–1857.) – француски математичар, дао значајан допринос у математичкој и комплексној анализи.

6. Нека је $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ диференцијабилно пресликавање а $\sigma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ ротациона површ дата са $\sigma(u, v) = (u \cos v, u \sin v, f(u))$. Наћи све функције f за које је σ конформно.

7. Показати да је за
$$\phi(u, v) = \left(\frac{\cos v}{\cosh u}, \frac{\sin v}{\cosh u}, \operatorname{tgh} u\right)$$
са $(\phi(\mathbb{R}^2), \phi^{-1})$ дата једна карта сфере $\mathbb{S}^2$. Пресликавање ϕ назива се **Меркаторова пројекција**.[50] Шта су слике кривих $v = const$ и $u = const$? Показати да је преликавање ϕ конформно.

8. Одредити криве на сфери $\mathbb{S}^2$ које у свакој својој тачки заклапају исти угао са одговарајућим меридијаном (**локсодроме**). Шта је слика локсодрома у Меркаторовој пројекцији?

9. Показати да је повезаност дата у Задатку 4.10 за произвољно векторско поље V метричка. За $V = -\operatorname{tg}\theta\frac{\partial}{\partial\theta}$ показати да је повезаност равна. Показати да су геодезијске криве ове повезаности локсодроме.

10. Наћи прву фундаменталну форму стандардне метрике простора $\mathbb{R}^2$ у поларним координатама (r, ϕ).

11. Доказати да је конус $\{(z \cos\phi, z \sin\phi, z) \mid z > 0, \phi \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$ локално изометричан равни $\mathbb{R}^2$.

12. а) Нека је функција $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дата са
$$g(t) = \begin{cases} \exp\left(\dfrac{1}{(t-1)(t-2)}\right), & t \in (1, 2), \\ 0, & t \in (-\infty, 1] \cup [2, +\infty), \end{cases}$$
затим $g_1 : [0, 3] \to \mathbb{R}$ са
$$g_1(t) = \frac{\pi}{2}\frac{\int_t^\infty g(s)ds}{\int_{-\infty}^\infty g(s)ds}$$
и $z(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ функција са периодом 6 таква да је $z(t) = g_1(t), t \in [0, 3]; z(t) = g_1(-t), t \in [-3, 0]$.

[50] Gerardus Mercator (1512.–1594.) – фламански картограф, филозоф и математичар. Географске карте у којима се користи Меркаторова пројекција биле су стандардне у морепловству управо због особина које треба доказати у овом и следећем задатку.

Показати да је z бесконачно диференцијабилна и да за $k \in \mathbb{Z}$ важи $z(t) = \frac{\pi}{2}, t \in (6k-1, 6k+1)$, односно $z(t) = 0, t \in (6k+2, 6k+4)$, па су сви изводи фунције z у тачкама $6k$ и $6k+3$ једнаки нули.

б) Нека је $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ диференцијабилна функција $f(x) \neq 0$ и $f'(x)^2 + z'(x)^2 \neq 0$. Нека је $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ дата са

$$h(x,y) = \begin{cases} \left(\dfrac{f(x)\cos z(x)}{s_1(x)} e^{iys_1(x)}, \dfrac{f(x)\sin z(x)}{s_2(x)} e^{iys_2(x)}\right), x \neq 3k \\ \left(0, \dfrac{f(x)\sin z(x)}{s_2(x)} e^{iys_2(x)}\right), x = 6k, \\ \left(\dfrac{f(x)\cos z(x)}{s_1(x)} e^{iys_1(x)}, 0\right), x = 6k+3, \end{cases}$$

где су $s_1(x)$ и $s_2(x)$ део-по-део константне функције са прекидима у тачкама $6k$, тј. $6k+3$ редом. Показати да је h имерзија и да је метрика на $\mathbb{R}^2$ индукована из $\mathbb{R}^4$ облика $ds^2 = \mu(x)^2 dx^2 + f(x)^2 dy^2$, где је μ нека функција. Показати да избором вредности функција s_1 и s_2 у интервалима повезаности можемо добити $0 < \mu(x) < \frac{1}{2}$.

13. Нека је $f(x) = \sinh(x)$ и $F_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ и $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^6$ дати са

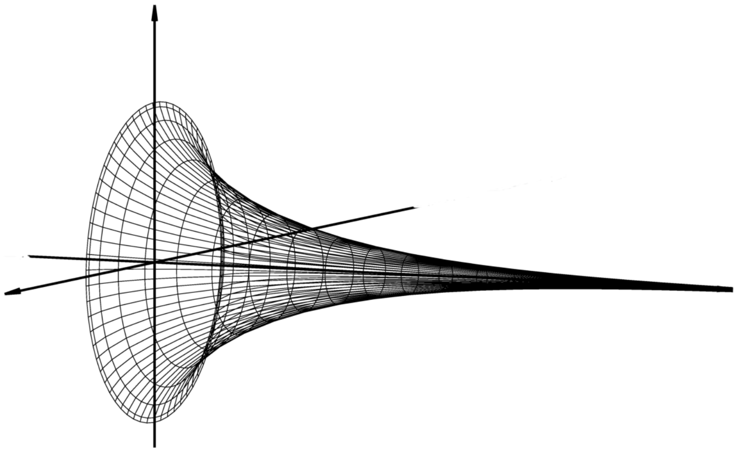
$$F_1(x,y) = (\int_0^x \sqrt{1-\mu(t)^2} dt, y)$$

и $F(x,y) = (F_1(x,y), h(x,y))$, где су дате функције дефинисане као у Задатку 12.
а) Показати да је F_1 дифеоморфизам и закључити да је $F(\mathbb{R}^2)$ график диференцијабилне функције две променљиве, односно да је F улагање, (иако у тачкама $(0,y)$ пресликавање h није ранга 2).
б) Доказати да је метрика на $\mathbb{R}^2$ индукована из $\mathbb{R}^6$ облика $ds^2 = dx^2 + \cosh^2 x dy^2$, односно да је F изометричко улагање модела хиперболичке равни из Примера 5.20 у $\mathbb{R}^6$.

14. Равну криву такву да је одсечак тангенте у њеној произвољној тачки до задате праве константне дужине називамо **трактриса**. Нека је дата дужина $a = 1$, координатни систем у равни такав да је задата права x-оса и нека је трактриса параметризована са $(f(u), g(u))$.
а) Показати да важи $\sqrt{f'^2 + g'^2} = -\frac{g'}{g}$.
б) Нека је $f(u) > 0$. Показати да је

$$f(u) = u - \operatorname{tgh} u, g(u) = \frac{1}{\operatorname{ch} u}$$

једна параметризација трактрисе.
в) Ротацијом трактрисе око x-осе добија се ротациона површ **псеудосфера**, видети Слику 5.9. Показати да је псеудосфера локално изометрична хиперболичкој полуравни.



Сл. 5.9 Псеудосфера

15. Показати да је формулом (5.2), односно (5.1) дефинисана симетрична повезаност компатибилна са метриком g Риманове многострукости (M, g) и показати да дефиниција повезаности не зависи од избора базе.

16. Наћи Кристофелове симболе метрике $ds^2 = \lambda(u, v)(du^2 + dv^2)$.

17. Показати да дефиниција векторског поља средње кривине (5.3) не зависи од избора локалног ортонормираног покретног репера.

18. Одредити геодезијске криве у Поенкареовом диск моделу $\mathbb{D}^2$.

19. Нека је $f : (M, g) \to (N, h)$ конформно пресликавање Риманових многострукости са Леви-Чивита повезаностима ∇ и $\overline{\nabla}$, редом, и нека је прва основна форма метрике h изражена преко метрике g са $ds_1^2 = e^\lambda ds^2$. Показати да је

$$\overline{\nabla}_{df(X)} df(Y) = df(\nabla_X Y + \frac{1}{2}(X(\lambda)Y + Y(\lambda)X - g(X, Y)V),$$

где је V векторско поље на Mтакво да је $g(X, V) = X(\lambda)$, које се назива **градијент функције** λ.

20. Нека је M ротациона дводимензиона подмногострукост простора $\mathbb{R}^3$.

а) Показати да су меридијани геодезијске криве.
б) Одредити паралеле које су геодезијске криве.
в) Ако је γ геодезијска на M, она са паралелом у тачки $\gamma(t)$ заклапа угао $\beta(t)$. Одредити $\beta(t)$.
г) (Клероова[51] релација) Ако је r удаљеност тачке од осе ротације, показати да је $r\cos\beta$ константно дуж криве γ.

21. Одредити минималне дводимензионе, ротационе подмногострукости $\mathbb{R}^3$.

22. Дат је једнограни хиперболоид $H : x^2 + y^2 - z^2 = 1$. Нека је $\alpha : I \to H$ крива на хиперболоиду таква да у свакој својој тачки p са паралелом хиперболоида заклапа угао $\theta(p)$ такав да је $\cos\theta = \frac{1}{r}$ где је r удаљеност тачке p од z-осе. Ако је $\|\alpha'\| = 1$, показати да је α геодезијска крива на многострукости H.

23. Наћи геодезијске криве на цилиндру $x^2 + y^2 = 1$.

24. Наћи геодезијске криве на торусу $\mathbb{T}^2$. Видети и Задатак 1.16.

25. Подмногострукост у $\mathbb{R}^n$ кодимензије 1 је оријентабилна ако и само ако постоји нормално векторско поље дефинисано на тој подмногострукости. Доказати.

26. Нека је p тачка сфере $\mathbb{S}^2$ и R ротација простора $T_p\mathbb{S}^2$. Наћи мали круг сфере α кроз тачку p такав да је паралелно померање дуж α, $T_\alpha = R$.

27. На хеликоиду $(u\cos v, u\sin v, hv), u > 0, v \in \mathbb{R}$ дата је крива $(a\cos v, a\sin v, hv)$, $a = const$, $0 \leq v \leq 2\pi$. Паралелно померити неки вектор тангентан на хеликоид дуж криве.

28. Доказати да је, за $p \in \mathbb{S}^2$, група $Hol_p\mathbb{S}^2$ изоморфна $SO(2)$.

29. Одредити и решити једначине паралелног померања по кривој $\theta = const$ у метрици $ds^2 = d\theta^2 + \sinh^2\theta d\phi^2$.

30. Нека је $\theta \in (0, \pi/2)$. Нека је $\mathbb{T}^2_\theta = \{(\cos\theta e^{i\alpha}, \sin\theta e^{i\beta}) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ дводимензиони торус. Одредити θ за које је $\mathbb{T}^2_\theta$ минимална подмногострукост сфере $\mathbb{S}^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid \|z_1\|^2 + \|z_2\|^2 = 1\}$.

31. Показати да је улагање Веронезеа $\mathbb{RP}^2 = \mathbb{S}^2/\{x, -x\}$ у $\mathbb{S}^4 \subset \mathbb{R}^5$, видети Задатак 3.13 (в), конформно и минимално. Наћи изометрично улагање $\mathbb{RP}^2$ у $\mathbb{R}^5$.

[51] Alexis Claude Clairaut (1713–1765) – француски математичар.

32. Дато је пресликавање $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}$ са
$$f(X_1, \dots, x_{n+1}) = \left(\frac{x_1^2}{\sqrt{2}}, \dots, \frac{x_{n+1}^2}{\sqrt{2}}, x_1x_2, x_1x_3, \dots, x_nx_{n+1} \right).$$
Показати да његова рестрикција на сферу $\mathbb{S}^n$ индукује изометрично смештање пројективног простора $\mathbb{RP}^n$ у $\mathbb{R}^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}$.

33. Дата је тачка $p = (0, 1)$ у хиперболичкој полуравни $\mathbb{H}^2$. Експлицитно одредити пресликавање $\exp_p$.

34. Дата је тачка $p = (0, 0, 0)$ на параболоиду $z = x^2 + y^2$. Експлицитно одредити пресликавање $\exp_p$.

35. Показати да дефиниција секционе кривине равни Π не зависи од избора ортонормиране базе Π.

36. Сфера $\mathbb{S}^n$ има константну секциону кривину $+1$. Показати.

37. Нека је (M, g) дводимензиона многострукост и (ρ, φ) поларне координате у T_pM. Тада у пресликавању $\exp_p^{-1}$ оне индукују **геодезијске координате** (r, ϕ) у околини тачке $p \in M$.
а) Показати да је метрика у геодезијским координатама следећег облика $ds^2 = dr^2 + Gd\phi^2$.
б) Показати да су ненула Кристофелови симболи у овој карти
$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{2G}\frac{\partial}{\partial r}G, \quad \Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial r}G, \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2G}\frac{\partial}{\partial \phi}G.$$
в) Показати да је координатна линија $\phi = const$ геодезијска кроз тачку p.
г) Показати да је координатна линија $r = const$ скуп тачака на површи подједнако удаљених од p, а зове се **геодезијски круг**.
д) Показати да је $\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\sqrt{G}\right) + K\sqrt{G} = 0$, где је K секциона кривина.
ђ) Показати да је
$$\lim_{r\to 0} G = 0, \quad \lim_{r\to 0} \frac{\partial}{\partial r}G = 0,$$
$$\lim_{r\to 0} \frac{\partial}{\partial r}\sqrt{G} = 1, \quad \lim_{r\to 0} \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\sqrt{G}\right) = 0.$$
е) Нека је $l(r)$ обим геодезијског круга. Показати да је
$$\lim_{r\to 0} \frac{2\pi r - l(r)}{r^3} = \frac{\pi}{3}K_p.$$

38. Нека су (M_1, g_1) и (M_2, g_2) Риманове многострукости и $M_1 \times M_2$ њихов производ, са метриком g датом на следећи начин. Нека је $(p,q) \in M_1 \times M_2$. Тада се произвољни вектор $X_{(p,q)} \in T_{(p,q)} M_1 \times M_2$ може представити, на јединствен начин, као $X_{(p,q)} = X_p + X_q$ где је $X_p \in T_p M_1$ и $X_q \in T_q M_2$. Нека је

$$\begin{aligned} g_{(p,q)}(X_{(p,q)}, Y_{(p,q)}) =& g_{1p}(X_p, Y_p) + g_{2q}(X_q, Y_q), \\ & X_{(p,q)}, Y_{(p,q)} \in T_{(p,q)}. \end{aligned}$$

а) Показати да је овим дата метрика на многострукости $M_1 \times M_2$.
б) Показати да је повезаност производа индукована са (M_1, ∇^1) и (M_2, ∇^2), где су ∇^1 и ∇^2 њихове Леви-Чивита повезаности, такође Леви-Чивита повезаност производа $(M_1 \times M_2, g)$.
в) Показати да је са $\overline{g}_{(p,q)}(X_{(p,q)}, Y_{(p,q)}) = g_1(X_p, Y_p) + 2g_2(X_q, Y_q)$ такође дата метрика на $M_1 \times M_2$ са истом Леви-Чивита повезаношћу.
г) Нека је $\sigma(X,Y) \subset T_{(p,q)}(M_1 \times M_2)$ раван таква да је $X_{(p,q)} = X_p + 0$ и $Y_{(p,q)} = 0 + Y_q$. Показати да је секциона кривина $K(\sigma) = 0$.
д) Показати да је

$$\begin{aligned} &R(X_1 + X_2, Y_1 + Y_2, Z_1 + Z_2, W_1 + W_2) \\ &= R_1(X_1, Y_1, Z_1, W_1) + R_2(X_2, Y_2, Z_2, W_2) \end{aligned}$$

где су $X_i, Y_i, Z_i, W_i \in \mathfrak{X}(M_i)$, R_1, R_2 и R Риманове кривине (M_1, g_1), (M_2, g_2) и $(M_1 \times M_2, g)$.

39. а) Нека је $f : M \to N$ локална изометрија, $p \in M$, $p_1 = f(p)$. Показати да је $f \circ \exp_p = \exp_{p_1} \circ df_p$ тамо где су изрази дефинисани.
б) Нека су $f_1, f_2 : M \to N$ две локалне изометрије, где је M повезана многостукост, такве да постоји тачка p за коју важи $df_{1p} = df_{2p}$. Доказати да је тада $f_1 = f_2$.

40. У простору $\mathbb{R}^3$ дате су површи
а) $M_1 = \{f(t,\theta) = (t\sin\theta, t\cos\theta, \ln t) \mid t > 0, \theta \in \mathbb{R}\}$
б) $M_2 = \{g(t,\theta) = (t\cos\theta, t\sin\theta, \theta) \mid t > 0, \theta \in \mathbb{R}\}$.
Показати да су секционе кривине ових површи у тачкама $f(t,\theta)$ и $g(t,\theta)$ једнаке $-\frac{1}{(1+t^2)^2}$. Показати да не постоји локална изометрија која слика неку отворену околину у M_1 у неку отворену околину у M_2.

41. Нека је M подмногострукост Риманове многострукости $(\widehat{M}, g)$ и нека су R, $\widehat{R}$ и h редом, њихове Риманове кривине и друга

фундаментална форма.
а) Наћи везу између R, $\widehat{R}$ и h.
б) Нека је γ геодезијска крива у $\widehat{M}$, и Π дводимензиона тангентна раван која садржи T_γ. Показати да је $K(\Pi) \leq \widehat{K}(\Pi)$, где су K и $\widehat{K}$ одговарајуће секционе кривине.

42. Нека је X векторско поље Римановој многострукости (M, g), а U околина тачке $p \in M$. Нека је $\phi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times U \to M$ ток поља X. Тада је X **Килингово векторско поље**[52] ако је за свако $t_0 \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ пресликавање $\phi_{t_0} : U \to \phi_{t_0}(U)$ изометрија.
а) Показати да је X Килингово векторско поље ако и само ако важи $g(\nabla_Y X, Z) + g(\nabla_Z X, Y) = 0$ за све $Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.
б) Нека је X Килингово векторско поље комплетне многострукости. Нека постоји тачка $q \in M$ такво да је $X(q) = 0$ и $(\nabla_Y X)_q = 0$ за произвољно векторско поље Y. Доказати да за свако t дифеоморфизам ϕ_t фиксира тачку q и да је $[X, Y]_q = 0$. Показати да одавде следи да је пресликавање $d(\phi_t)_q$ идентичко. Користећи експоненцијално пресликавање показати и да је ϕ_t идентитет односно да је $X = 0$ у некој околини тачке q.

43. а) Да ли је рестрикција векторског поља $X = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}$ датог у простору $\mathbb{R}^3$ у стандардним координатама на сферу $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ Килингово векторско поље?
б) Да ли је рестрикција поља

$$X = x_2\frac{\partial}{\partial x_1} - x_1\frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + x_{2n}\frac{\partial}{\partial x_{2n-1}} - x_{2n-1}\frac{\partial}{\partial x_{2n}}$$

на сферу $\mathbb{S}^{2n-1} \subset \mathbb{R}^{2n}$ Килингово векторско поље?

44. Наћи Килингова векторска поља на сфери $\mathbb{S}^2$ у метрици $ds^2 = d\theta^2 + \cos^2\theta d\phi^2$.

45. Килингово векторско поље X Риманове многострукости (M, g) је константне норме ако и само ако је свака интегрална крива поља X и геодезијска. Показати.

[52] Wilhelm Karl Joseph Killing (1847.–1923.) – немачки математичар, бавио се Лијевим алгебрама и групама и нееуклидским геометријама.