Предговор

Ова књига је замишљена као уџбеник за предмет „Очигледна топологија” на Математичком факултету Универзитета у Београду. У њој је извршен избор неких основних тополошких тема и дат је увод у сваку од њих. У питању су општа топологија, теорија графова и површи, као и теорија хомотопије. Најгрубље речено, топологија је математичка дисциплина која се бави оним својствима геометријских објеката која се не нарушавају непрекидним деформацијама тих објеката. У топологији је дозвољено дату фигуру истезати, савијати, скупљати, обртати и сл. Оно што је забрањено јесте кидање или цепање те фигуре, као и међусобно слепљивање неких њених делова. Зато ову математичку дисциплину неки називају „геометријом гумених објеката”. То се формализује појмом хомеоморфизма – централним појмом топологије. Књига представља покушај излагања тополошке тематике истовремено и формално и неформално. С једне стране, сви појмови су строго дефинисани и за највећи број наведених тврђења, кад год то није представљало превелико оптерећење за текст, дати су потпуни математички докази. С друге стране, паралелно с формалним излагањем, пре свега помоћу великог броја пропратних цртежа, слика и дијаграма, презентован је и неформалан, интиутиван опис обрађиваног садржаја.

Садржај књиге је подељен на три главе, а свака од њих на неколико одељака. Свака глава обрађује по једну од три поменуте теме: општу топологију, теорију графова и површи и теорију хомотопије. Наравно, реч је о пуком упознавању са основним појмовима и постулатима из ових области; свака од њих је далеко садржајнија и опширнија од описа који је дат у овој књизи. Последњи одељак сваке главе састоји се из задатака који се односе на одговарајућу тему. Они су замишљени као вежба и прилика за читаоца да њиховим решавањем тестира своје разумевање пређеног градива. Самим тим, они би требало да буду корисни у припреми студената за писмени испит из овог предмета.

Прва глава „Тополошки простори” односи се на општу топологију. У њој су дефинисани тополошки простори, непрекидна пресликавања између њих, хомеоморфизми, као и неколико основних тополошких особина, попут компактности, повезаности и путне повезаности. Установљене су и неке елементарне везе између тих појмова. Такође, описане су и две важне конструкције: тополошки производ и тополошки количник. Ова глава уједно представља и неопходну подлогу за читање и усвајање садржаја из наредне две главе. Много детаљнији увод у општу топологију може се наћи у књигама [2, 3].

Друга глава носи назив „Графови, површи, мапе на површима” и највећим својим делом се ослања на [4]. Графови представљају једнодимензионе, а површи дводимензионе геометријске објекте. Најпростије речено, граф се састоји од неколико темена (тачака у простору) и неколико ивица – дужи које спајају нека од тих темена. Дефинисани су Ојлерова карактеристика, хроматски број, планарност и још нека тополошка и комбинаторна својства графова. Поред тога, наведене су и неке знамените теореме из ове теорије, од којих су многе и доказане. Ова глава се посебно бави и једним видом интеракције између графова и површи – мапама на површима. Доста пажње је посвећено бојењу мапа на површима тако да свака два суседна региона мапе буду обојена различитим бојама. Посебно је у том контексту разматран чувени „проблем четири боје” – проблем да се докаже да се свака мапа у равни може тако обојити користећи само четири боје.

У трећој глави, која је насловљена са „Хомотопија”, дат је кратак увод у једну врло широку и плодну грану топологије – теорију хомотопије. Уведени су појмови хомотопних пресликавања и хомотопски еквивалентних простора, а затим је дефинисана и фундаментална група тополошког простора – појам чији је значај у топологији тешко преценити. То је прва алгебарска структура придружена тополошком простору, и представља прву лекцију у тзв. алгебарској топологији. Резултати везани за хомотопију и фундаменталну групу, који су добијени у првом делу ове главе, у другом њеном делу су примењени на доказивање неколико знаменитих теорема. Најпре је дат тополошки доказ Основне теореме алгебре, а затим су у „ниско-димензионим случајевима” доказане Брауерова теорема о фиксној тачки и Борсук–Уламова теорема.

Садржај

1 Тополошки простори

1.1 Дефиниција, отворени и затворени скупови, потпростор

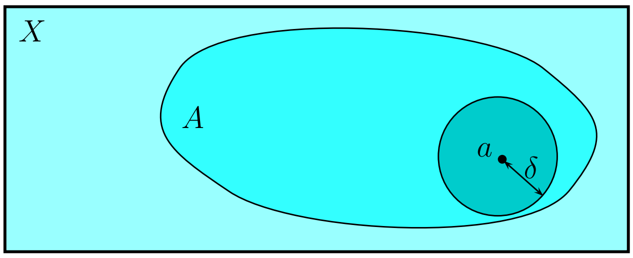
Тополошки простори представљају уопштење (од раније познатих) метричких простора. Подсетимо се да је *метрички простор* уређен пар (X, d), где је X непразан скуп, а $d : X \times X \to [0, +\infty)$ *метрика* или *растојање* на X – функција која за све $x, y, z \in X$ задовољава следећа три услова:

(1) $d(x, y) = 0 \iff x = y$;

(2) $d(x, y) = d(y, x)$;

(3) $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$.

Појам отвореног скупа у метричком простору уводи се помоћу појма отворене кугле. Ако је $x_0 \in X$ и $\delta > 0$, *отвореном куглом са центром у* x_0 *полупречника* δ називамо скуп $\{x \in X \mid d(x_0, x) < \delta\}$ и означавамо га са $B(x_0; \delta)$. Сада, за скуп $A \subseteq X$ кажемо да је *отворен* (у метричком простору (X, d)) ако за свако $a \in A$ постоји $\delta > 0$ такво да је $B(a; \delta) \subseteq A$. Познато је да у метричком простору (X, d) важе следећа тврђења.



(1) $\emptyset$ и X јесу отворени.

(2) Ако је $\mathcal{U}$ нека фамилија отворених скупова, онда је и унија те фамилије, $\bigcup \mathcal{U}$, такође отворен скуп.

(3) Ако су U и V отворени скупови, онда је и $U \cap V$ отворен скуп.

1.1.1 Дефиниција и примери

Три поменута својства отворених скупова у метричком простору представљају мотивацију за увођење појма тополошког простора.

Дефиниција 1 Нека је X непразан скуп и $\mathcal{P}(X)$ његов партитивни скуп. Фамилију $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ називамо *тополођијом* на X ако су испуњена наредна три услова:

(T1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$;

(T2) $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T} \implies \bigcup \mathcal{U} \in \mathcal{T}$;

(T3) $U, V \in \mathcal{T} \implies U \cap V \in \mathcal{T}$.

Тада, пар $(X, \mathcal{T})$ називамо *тополошким простором*, а елементе топологије $\mathcal{T}$ *отвореним скуповима*. Такође, говорићемо и о тополошком простору X подразумевајући при том извесну топологију.

Наравно, индукцијом се из услова (T3) лако добија чињеница да топологија која садржи скупове $U_1, U_2, \ldots, U_n$ ($n \in \mathbb{N}$) нужно садржи и њихов пресек $U_1 \cap U_2 \cap \ldots \cap U_n$. Дакле, топологија је фамилија подскупова од X која садржи $\emptyset$ и X и која је затворена за произвољне уније и коначне пресеке.

Пример 1.1.1 Ако је (X, d) метрички простор, онда је, на основу уводног разматрања, фамилија свих отворених скупова у (X, d) једна топологија на X. Њу означавамо са $\mathcal{T}(d)$ и називамо је *топологијом индукованом метриком* d.

Посебно, топологију индуковану еуклидском метриком на $\mathbb{R}^n$ називамо *уобичајеном топологијом на* $\mathbb{R}^n$ и означавамо је са $\mathcal{U}$. Дакле, $\mathcal{U} = \mathcal{T}(d_2)$, где је $d_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ дефинисана са $d_2(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$, $x, y \in \mathbb{R}^n$. Убудуће, ако другачије не буде наглашено, на $\mathbb{R}^n$ подразумевамо уобичајену топологију.

Издвојићемо још један специјалан случај. На произвољном скупу X дефинише се *дискретна метрика* ρ, $\rho(x, y) := 1$ кад год су x и y две различите тачке из X, и наравно, $\rho(x, x) := 0$ за све $x \in X$. Одговарајућу топологију $\mathcal{T}(\rho)$ зовемо *дискретном топологијом* на X и обично је означавамо са $\mathcal{T}_d$. Како је, за произвољно $x \in X$, $B(x; \frac{1}{2}) = \{x\}$, то је $\{x\}$ отворен скуп у простору $(X, \mathcal{T}_d)$, па с обзиром на чињеницу да је $A = \bigcup_{a \in A} \{a\}$ за сваки скуп A, услов (T2) из дефиниције даје нам да дискретна топологија $\mathcal{T}_d$ садржи све подскупове од X. Дакле, $\mathcal{T}_d = \mathcal{P}(X)$.

Пример 1.1.2 Као супротност дискретној топологији, која обухвата све подскупове датог скупа X, уочимо фамилију $\mathcal{T}_a := \{\emptyset, X\}$. Лако се проверава да је $\mathcal{T}_a$ једна топологија на X. Она се зове *антидискретна топологија*. Приметимо да, ако X има бар два елемента, антидискретна топологија није индукована метриком. Наиме, ако би d била метрика у којој су само празан скуп и цео X отворени, онда би свака отворена кугла била једнака са X (јер је отворена кугла непразан отворен скуп). Међутим, ако су $x, y \in X$ две различите тачке и $\varepsilon = d(x, y) > 0$, онда кугла $B(x; \frac{\varepsilon}{2})$ не садржи тачку y. Дакле, антидискретан простор је пример тополошког простора који није метрички.

Пример 1.1.3 Нека је X произвољан непразан скуп. Уочимо фамилију $\mathcal{T}_{cf} := \{U \subseteq X \mid U^c \text{ је коначан скуп}\} \cup \{\emptyset\}$. Докажимо да она представља једну топологију на X.

Очигледно, $\emptyset \in \mathcal{T}_{cf}$, а како је $X^c = \emptyset$ коначан, то и $X \in \mathcal{T}_{cf}$. Дакле, испуњен је услов (T1).

Нека је сада $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ подфамилија фамилије $\mathcal{T}_{cf}$. Докажимо да $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in \mathcal{T}_{cf}$. Ако ова фамилија садржи празан скуп, његовим избацивањем се неће променити унија фамилије, па стога можемо претпоставити да су сви U_λ непразни. Сада, $(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda)^c = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda^c$ јесте коначан скуп као пресек коначних, па закључујемо да важи и (T2).

Коначно, нека су $U, V \in \mathcal{T}_{cf}$. Ако је неки од ова два скупа празан, онда је и њихов пресек празан. Ако су оба непразна, онда је $(U \cap V)^c = U^c \cup V^c$ коначан скуп као унија два коначна. У сваком случају, $U \cap V \in \mathcal{T}_{cf}$, па смо доказали и услов (T3).

Топологију $\mathcal{T}_{cf}$ називамо *кофинитном топологијом* на X. Ако је X коначан, онда је наравно и сваки његов подскуп коначан, па је, у том случају, $\mathcal{T}_{cf} = \mathcal{T}_d = \mathcal{P}(X)$.

Пример 1.1.4 Нека је X скуп и $p \in X$. Фамилија $\mathcal{T}_p := \{U \subseteq X \mid p \in U\} \cup \{\emptyset\}$ очито садржи и $\emptyset$ и X, а лако се види и да је затворена за произвољне уније и пресеке. Дакле, $\mathcal{T}_p$ је топологија на X, коју називамо *топологијом уочене тачке* p.

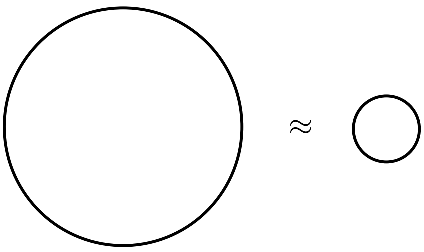
У случају кад X има тачно два елемента, простор $(X, \mathcal{T}_p)$ назива се и *свезаном двотачком* или *простором Сјербинског.*

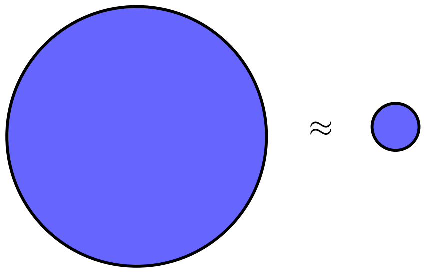
Пример 1.2.5 Пресликавање $h : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ дефинисано са $h(x) = \operatorname{tg} x$, представља хомеоморфизам између отвореног интервала и читаве реалне праве ($h^{-1}(y) = \operatorname{arctg} y$). Дакле, отворену дуж, можемо да растегнемо чак „у бесконачност", а да јој не променимо тополошки тип. И обрнуто, (неограничену) праву можемо да скупимо на ограничен интервал, али отворен (тако да не садржи крајње тачке).

Рестрикција пресликавања h на $[0, \frac{\pi}{2})$ даје хомеоморфизам између полуотворене дужи и полуправе $[0, +\infty)$.

Пример 1.2.6 Ако је $k_r = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = r\}$ кружница у равни са центром у координатном почетку полупречника $r > 0$, онда пресликавање (хомотетија) $h : S^1 \to k_r$, дефинисано са $h(x) = rx$, представља хомеоморфизам између јединичне кружнице $S^1 = k_1$ и кружнице k_r ($h^{-1}(y) = \frac{1}{r} \cdot y$). Слично, ако је $\widetilde{k}_r$ кружница у равни полупречника r чији центар није обавезно у координатном почетку, одговарајућа транслација успоставља хомеоморфизам између кружница k_r и $\widetilde{k}_r$.

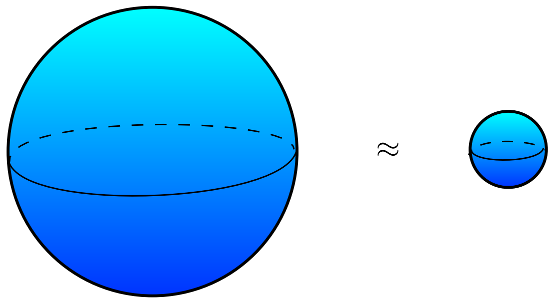
Дакле, све кружнице у равни, без обзира на центар и полупречник, међусобно су хомеоморфне. То опет значи да се истезањем и скупљањем кружнице не мења тополошки тип.





Наравно, хомотетије и транслације успостављају хомеоморфизме и између затворених дискова различитих центара и полупречника, затим, отворених дискова итд.

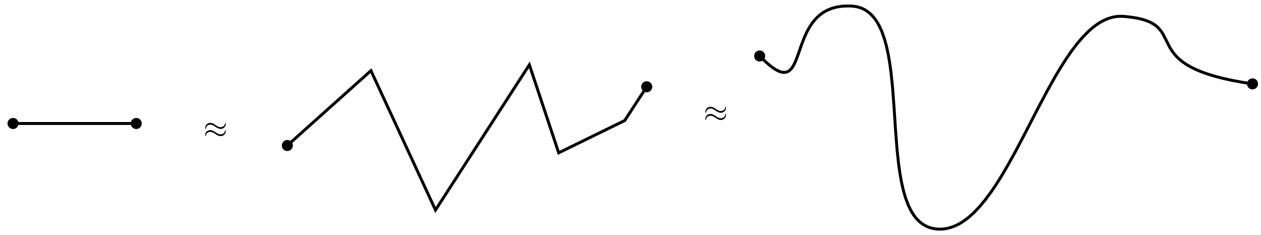
Потпуно је аналогна ситуација и у вишим димензијама. На пример, све дводимензионе сфере су међусобно хомеоморфне. Дакле, сферу можемо да „надуваваmo" и „издувавамо". Тополошки, све остаје исто.



Пример 1.2.7 На основу примера 1.2.5, отворени интервал, односно једнодимензиони отворени диск, $\mathring{D}^1 = (-1, 1)$ хомеоморфан је читавој реалној правој. Важи и уопштење овога: $\mathring{D}^n \approx \mathbb{R}^n$ за свако $n \in \mathbb{N}$. На пример, пресликавање $h : \mathring{D}^n \to \mathbb{R}^n$ дато са $h(x) = \frac{1}{1-\|x\|} \cdot x$, представља хомеоморфизам, јер је непрекидно, а и њему инверзно $h^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathring{D}^n$, $h^{-1}(y) = \frac{1}{1+\|y\|} \cdot y$, такође је непрекидно.

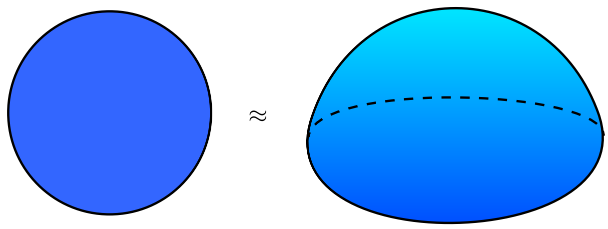
Пример 1.2.8 Нека је дат $X \subseteq \mathbb{R}^n$ и нека је $f : X \to \mathbb{R}$ непрекидно пресликавање. Ако је $\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ график функције f, онда је пресликавање $h : X \to \Gamma_f$, дефинисано са $h(x) = (x, f(x))$, хомеоморфизам. Наиме, оно је очигледно бијективно; непрекидно је, јер су му координатна пресликавања непрекидна (овде се користи чињеница да је f непрекидно); док је његов инверз рестрикција на Γ_f пројекције на првих n координата, па је и оно непрекидно.

Дакле, график непрекидне реалне функције хомеоморфан је домену те функције. На пример, сегмент (затворена дуж) хомеоморфан је графику било које непрекидне функције дефинисане на том сегменту.

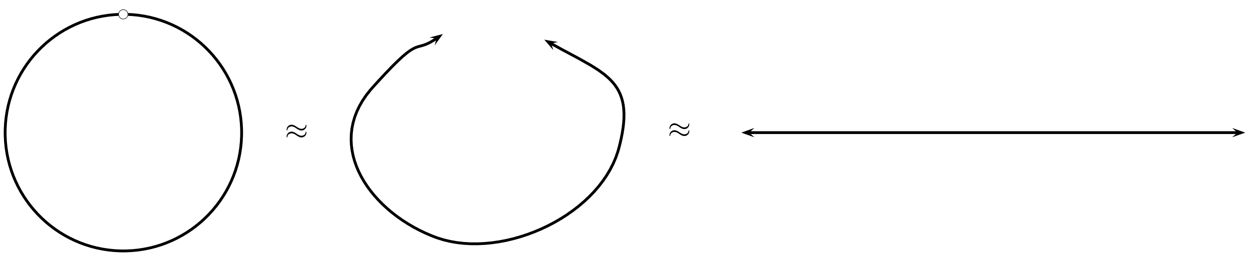


Дакле, дужи не само да можемо да растежемо и скупљамо, већ можемо и да их савијамо и исправљамо.

Слична је ситуација и код вишедимензионих геометријских фигура. И њихов тополошки тип се не мења приликом савијања, скупљања, истезања, исправљања. На пример, график функције $f : D^n \to \mathbb{R}$ дефинисане са $f(x) = \sqrt{1 - \|x\|^2}$, јесте полусфера димензије n. Посебно, дводимензиони затворени диск D^2 хомеоморфан је (затвореној) полусфери.



Пример 1.2.9 Ако са кружнице избацимо једну тачку, онда нам интуиција казује да је добијена крива хомеоморфна отвореној дужи. Наиме, на месту где је избачена тачка, линија се „раздвоји”, па након исправљања, добијамо отворену дуж.



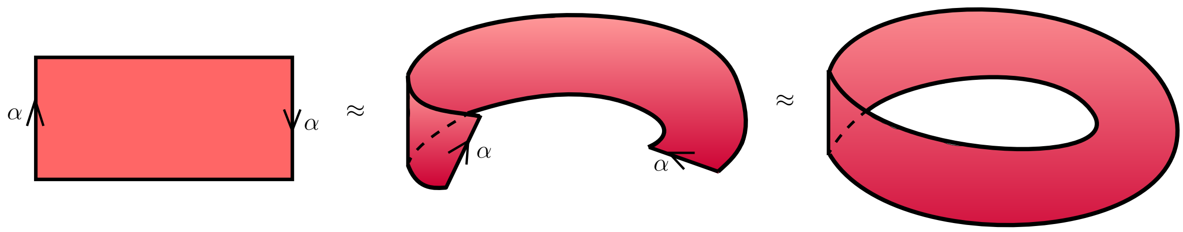
Уз то, како је отворена дуж хомеоморфна читавој реалној правој (пример 1.2.5), то је кружница без једне тачке, у ознаци $S^1 \setminus *$, хомеоморфна са $\mathbb{R}$. Докажимо формално ову чињеницу. Заправо, важи и много општије: $S^n \setminus * \approx \mathbb{R}^n$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Предстојећи доказ је и дат за општи случај.

Најпре, приметимо да тополошки тип простора $S^n \setminus *$ не зависи од избачене тачке, јер хомеоморфизам између два таква простора (за два различита избора тачке која се избацује) остварује одговарајућа ротација (амбијентног) простора $\mathbb{R}^{n+1}$. Зато, без губитка општости, можемо посматрати простор $S^n \setminus \{N\}$, где је $N = (0, 0, \ldots, 0, 1)$ „северни пол”. Дефинишемо пресликавање $s : S^n \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^n$, које се зове *стереографска пројекција*, на следећи начин: тачки $x \in S^n \setminus \{N\}$ додељујемо пресек полуправе Nx (чије је теме N и која пролази кроз x) са хиперравни $\alpha : x_{n+1} = 0$ (која се на природан начин идентификује са $\mathbb{R}^n$).

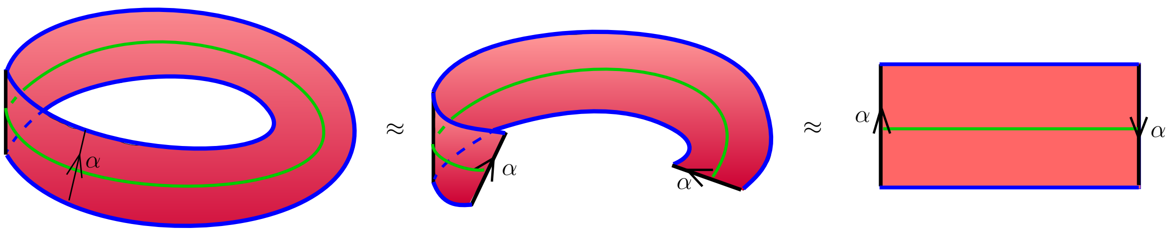
Нагласимо да је простор лево на овој слици повезан (хомеоморфан је простору десно – диску), иако је он количник неповезаног простора – дисјунктне уније два полудиска.

Покажимо, још само на овом примеру, како би се формално образложило да су простори који настају један од другог сечењем и лепљењем међусобно хомеоморфни. (Надаље ћемо се мало слободније опходити према количничким просторима – сецкаћемо их и лепити, без задржавања на оваквим формалностима.) Ако са X означимо дисјунктну унију два полудиска, а са Y диск, онда можемо да уочимо пресликавање $f : X \to Y$ које један од два полудиска хомеоморфно преслика на „леву половину" диска, а други хомеоморфно на десну половину. То пресликавање је непрекидно (по Теореми о лепљењу), очигледно је „на" и слика компактан у Хауздорфов простор. Зато је f количничко, па је, по теореми 91, $X/f \approx Y$. Међутим, пресликавање f индукује на X управо релацију (еквиваленције) описану на цртежу – одговарајуће тачке двеју дужи означених са α помоћу f се сликају у исту тачку.

Пример 1.7.5 (Мебијусова трака) Посматрајмо сад правоугаоник коме су идентификоване две наспрамне странице, али тако да су одговарајуће стрелице супротно усмерене. Да бисмо залепили ове две странице, потребно је да једну заротирамо за $180°$. Када извршимо то лепљење, добијамо *Мебијусову траку*.

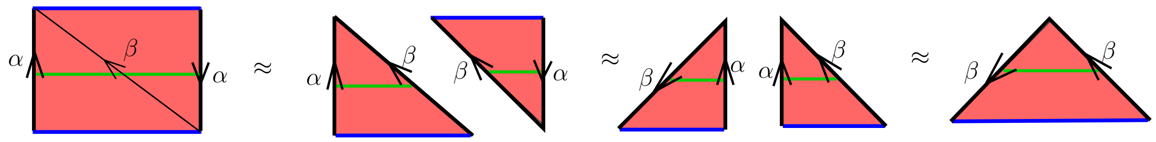


Дакле, правоугаоник са оваквом идентификацијом две наспрамне странице представља један количнички модел (у равни) Мебијусове траке. На Мебијусовој траци уочимо две (тополошке) кружнице. На слици ниже, зеленом бојом је обојена тзв. *централна кружница*, а плавом тзв. *гранична кружница* Мебијусове траке. Овде се реч „гранична", односно „граница", користи у другачијем смислу од оног из дефиниције 12. Интуитивно је јасно о каквој „граници" је овде реч, а нешто касније ће овај појам бити и формално уведен. У овом смислу, дакле, граница Мебијусове траке састоји се из једне кружнице, док границу цилиндра (в. пример 1.7.4) чине две дисјунктне кружнице.



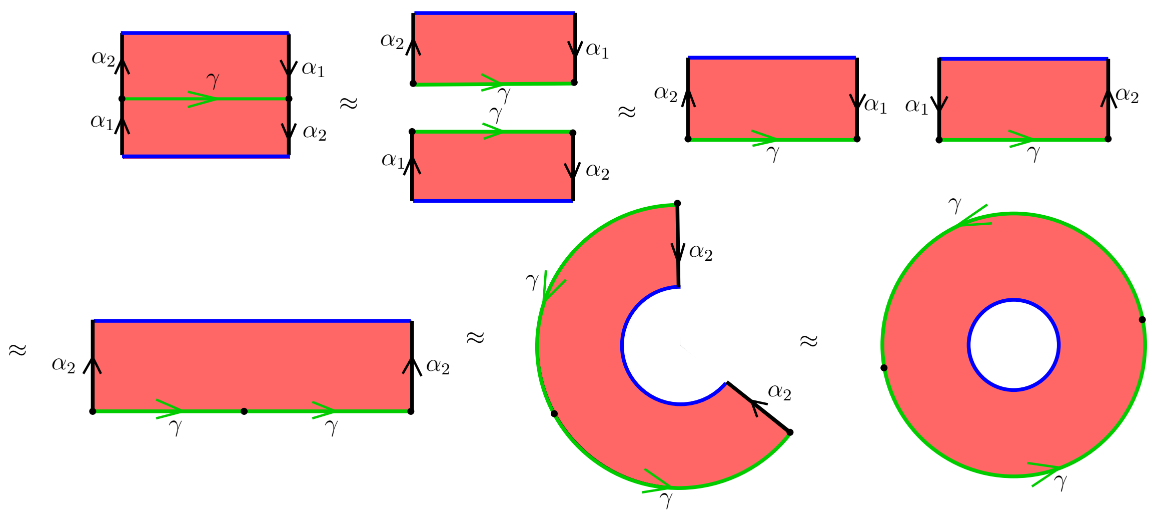
На цртежу је јасно приказано како се ове две кружнице на Мебијусовој траци виде у поменутом количничком моделу – кад исечемо по дужи α. На пример, гранична кружница је овде количник две дисјунктне дужи – две (неидентификоване) наспрамне странице правоугаоника. Ако кренемо по тој кружници из доњег левог темена правоугаоника (које је „почетна" тачка дужи α) по доњој страници, стижемо до доњег десног темена, које је „крајња” тачка дужи α. Али и горње лево теме је крајња тачка дужи α, па се, дакле, налазимо у њему. Онда наставимо кретање по горњој страници и стижемо до горњег десног темена, а то је опет почетна тачка дужи α, што значи да смо се вратили у тачку из које смо кренули. Тиме смо обишли целу граничну кружницу.

Поред овог, Мебијусова трака има и друге раванске количничке моделе. На пример, ако овај правоугаони модел исечемо по дијагонали β, затим десни троугао заротирамо око једне (плаве) његове странице, па га онда поставимо лево у односу на други троугао и на крају залепимо по α, добијамо један троугаони модел Мебијусове траке. Приметимо да је β (тополошка) кружница, јер су почетна и крајња тачка од β међусобно идентификоване.



Дакле, троугао чије су две странице идентификоване на приказан начин јесте заправо Мебијусова трака. На цртежу је истакнуто и шта се дешава са централном и граничном кружницом Мебијусове траке у овом количничком моделу. Гранична је, у ствари, она трећа страница троугла (чији су крајеви идентификовани), а централна је одговарајућа средња линија троугла. Приметимо да су сва три темена троугла заправо једна те иста тачка у овом количничком простору, тј. да темена чине једну трочлану класу назначене релације еквиваленције.

На следећој слици је описано како се добија још један количнички модел у равни Мебијусове траке.



Дуж α се подели на две: α_1 и α_2; централна кружница се означи са γ, па се описаним сецкањем и лепљењем долази до кружног прстена са идентификацијом на једној од две његове граничне кружнице. Свака тачка те кружнице у релацији је са себи дијаметрално супротном (антиподалном) тачком, па се зато ова идентификација зове *антиподална идентификација*.

2 Графови, површи, мапе на површима

2.1 Графови – дефиниција, геометријска реализација

2.1.1 Комбинаторна и тополошка дефиниција графа

Дефиниција 98 Нека су V и E скупови, $V \neq \emptyset$, и $f : E \to V^2$ функција. Уређену тројку (V, E, f) називамо *усмереним графом*. Елементе скупа V називамо *теменима*, а елементе скупа E *ивицама* уоченог усмереног графа. Ако је $e \in E$ и $f(e) = (v_1, v_2)$, онда кажемо да ивица e спаја теме v_1 с теменом v_2.

Неусмерен граф добијамо игнорисањем оријентације (усмерења) ивица. Другим речима, уместо уређеног пара, свакој ивици се додељује неуређен пар темена – скуп од једног или два темена. За дати скуп V, означимо са $\mathcal{P}_{1,2}(V)$ скуп свих његових непразних подскупова који су кардиналности највише 2, тј. $\mathcal{P}_{1,2}(V) := \{U \subseteq V \mid |U| = 1 \lor |U| = 2\}$.

Дефиниција 99 *Неусмерен граф*, или просто *граф*, јесте уређена тројка (V, E, f), где су V и E скупови, $V \neq \emptyset$, а $f : E \to \mathcal{P}_{1,2}(V)$ функција. Граф обично означавамо са G.

Елементе скупа V називамо *теменима*, а елементе скупа E *ивицама* графа $G = (V, E, f)$. За дату ивицу $e \in E$, елементе скупа $f(e)$ називамо *теменима ивице* e.

Нека је $e \in E$. Ако је $f(e) = \{v\}$, онда ивицу e називамо *петљом* у темену v. Ако је $|f(e)| = 2$ и $f(e) = \{v_1, v_2\}$, онда кажемо да ивица e *спаја* темена v_1 и v_2.

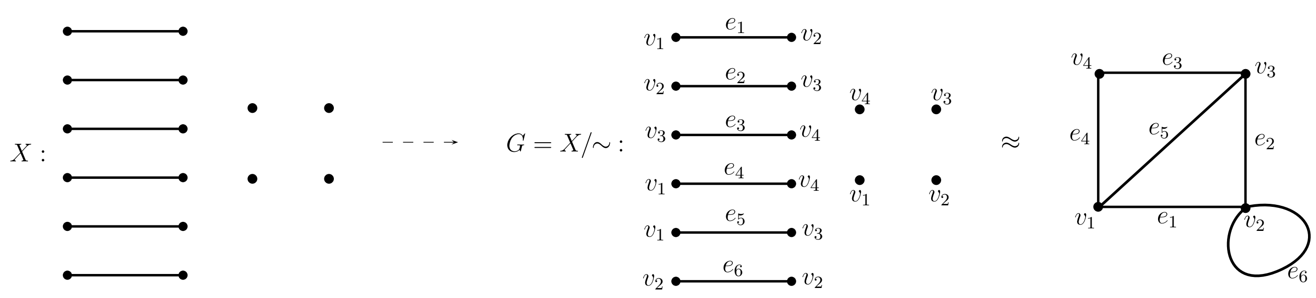
Два темена су *суседна* ако постоји ивица која их спаја.

Граф је *коначан* ако су скупови V и E коначни.

За нас су од интереса једино коначни графови, па зато у наставку под графом подразумевамо коначан (неусмерен) граф.

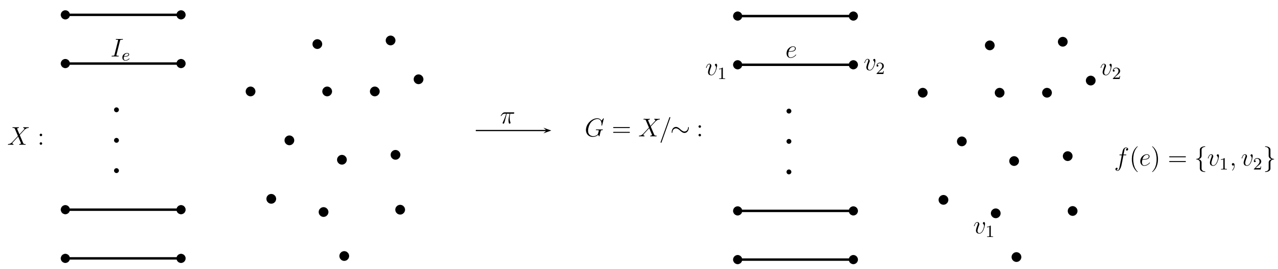
Сваком графу се на природан начин може придружити тополошки простор. Он заправо представља геометријску визуелизацију графа. Пре формалне дефиниције, илуструјмо то једним примером.

Пример 2.1.1 Нека је $G = (V, E, f)$ граф који има четири темена, $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, и шест ивица, $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$, при чему је $f : E \to \mathcal{P}_{1,2}(V)$ дата са: $f(e_1) = \{v_1, v_2\}$, $f(e_2) = \{v_2, v_3\}$, $f(e_3) = \{v_3, v_4\}$, $f(e_4) = \{v_1, v_4\}$, $f(e_5) = \{v_1, v_3\}$ и $f(e_6) = \{v_2\}$.



У еуклидској равни уочимо потпростор X, који се састоји од шест дисјунктних (нпр. паралелних) затворених дужи и још четири тачке. Означимо ове дужи са $e_1, e_2, \ldots, e_6$, а тачке са v_1, v_2, v_3, v_4, и посматрајмо количнички простор (простора X) који настаје када се крајеви ових шест дужи идентификују са одговарајућим тачкама, по правилу које „прописује" функција f. На пример, један крај дужи e_2 идентификује се с тачком v_2, а други с тачком v_3. Овај количнички простор $X/\!\sim$ означавамо такође са G.

Дефиниција 100 Нека је $G = (V, E, f)$ граф. У равни $\mathbb{R}^2$ уочимо потпростор који се састоји од $|E|$ дисјунктних затворених дужи и још $|V|$ тачака – дакле, свакој ивици графа одговара једна од ових дужи, а сваком темену једна од ових додатних тачака. Означимо тај потпростор са X. За сваку ивицу $e \in E$, извршимо следећу идентификацију у простору X: ако је $f(e) = \{v_1, v_2\}$, онда се један крај одговарајуће дужи идентификује с тачком која одговара темену v_1, а други с тачком која одговара темену v_2.

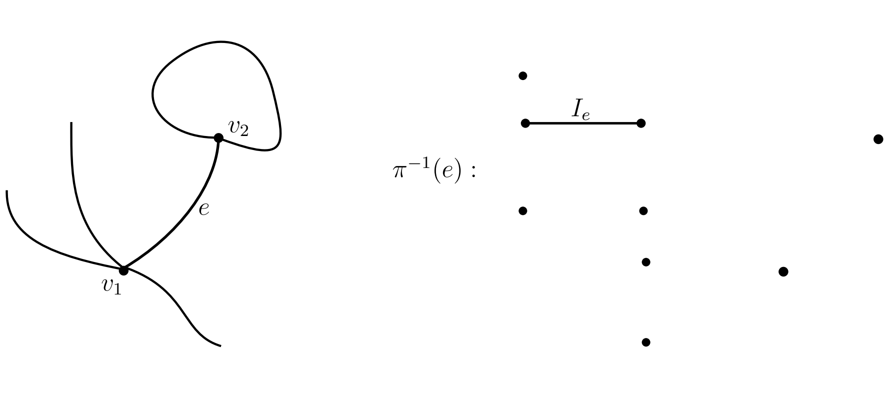


Добијени количнички простор $X/\!\sim$ означавамо опет са G и такође га називамо *графом* (у тополошком смислу). Ако је I_e једна од уочених затворених дужи – она која одговара ивици $e \in E$ – онда њену слику при природној сурјекцији $\pi : X \to X/\!\sim$ опет означавамо са e и зовемо је *ивицом графа* G. Слику одговарајуће отворене дужи (дужи I_e без својих крајева) при пресликавању π називамо *унутрашњошћу ивице* e.

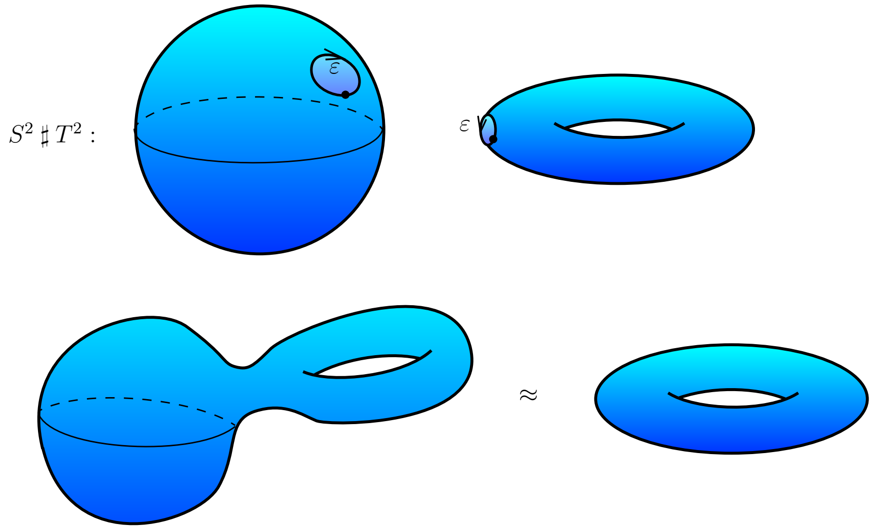
На основу става 89, простор $X/\!\sim$ не зависи (до на хомеоморфизам) од избора дисјунктних дужи и тачака које чине простор X. Зато је ова (тополошка) дефиниција графа исправна. Наравно, када кажемо „граф", из контекста ће увек бити јасно да ли се мисли на комбинаторни објекат из дефиниције 99 или на одговарајући тополошки простор (из дефиниције 100).

Вратимо се још мало овој тополошкој дефиницији графа. Како се при назначеној идентификацији у простору X, само крајеви дужи идентификују са још неким тачкама, то видимо да су две различите ивице графа или дисјунктне или се евентуално секу по заједничком темену (једном или два).

Приметимо да је свака ивица e графа G његов затворен потпростор. Наиме, инверзна слика $\pi^{-1}(e)$ састоји се од дужи I_e и једне, двеју, или више (у сваком случају, коначно много) тачака. У питању су оне тачке које одговарају теменима ивице e, а ако

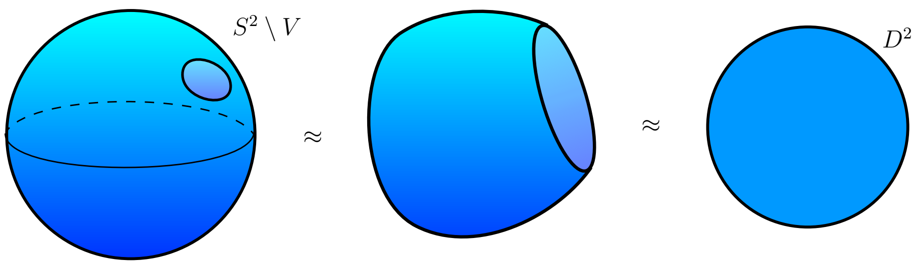


„прогласимо” за једну (на следећој слици, употребљена је ознака ε за ту кружницу). Међутим, кад се изврши назначено лепљење, добија се торус.

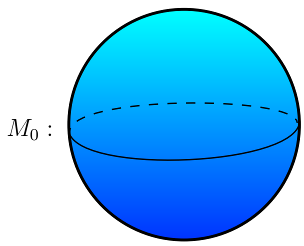


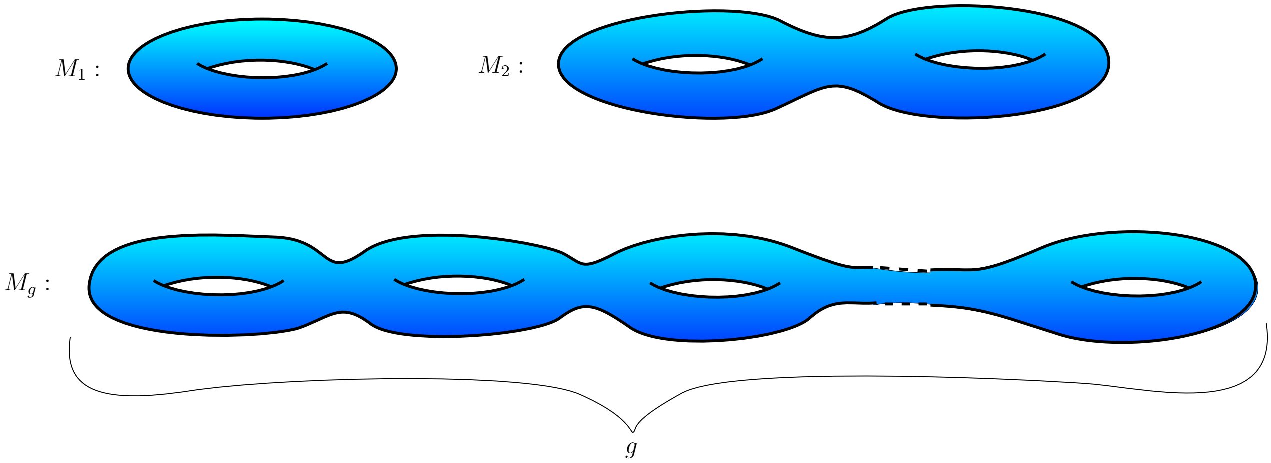
Може се показати да, до на хомеоморфизам, повезана сума $X \,\sharp\, Y$ затворених повезаних површи X и Y не зависи од избора (довољно малих) отворених дискова које скидамо са ових површи, као ни од избора хомеоморфизма $h : \partial\widetilde{X} \to \partial\widetilde{Y}$ по којем лепимо. Такође, показује се да је $X \,\sharp\, Y$ опет једна затворена повезана површ. Дакле, повезана сума је једна (до на хомеоморфизам) исправно дефинисана бинарна операција међу затвореним повезаним површима.

Малочас смо утврдили да је $S^2 \,\sharp\, T^2 \approx T^2$. Приметимо да важи и општије: сфера је неутрал операције $\sharp$. Наиме, скидањем малог отвореног диска V са сфере S^2 добијамо затворени диск D^2, а лепљењем овог диска на претходно направљен „отвор” на некој површи, тај отвор се просто затвори и добијамо површ од које смо кренули. Такође, није тешко видети да је повезана сума (до на хомеоморфизам) комутативна и асоцијативна операција.

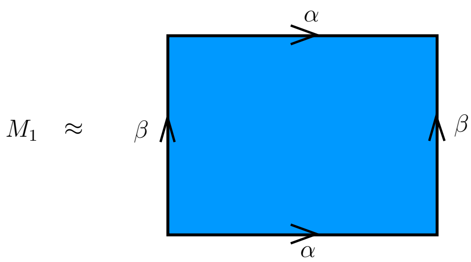


Сад ћемо посматрати две фамилије затворених повезаних површи. Елементе прве од њих означавамо са M_g, $g \in \mathbb{N}_0$, а дефинишемо их индуктивно. Површ M_0 је, по дефиницији, сфера, док сваку следећу површ у овом низу дефинишемо као повезану суму претходне с торусом: $M_g := M_{g-1} \,\sharp\, T^2$ за све $g \in \mathbb{N}$. Дакле, M_1 је торус (јер је то повезана сума сфере и торуса), а свака следећа површ добија се тако што се на претходну дода једна „ручка”.

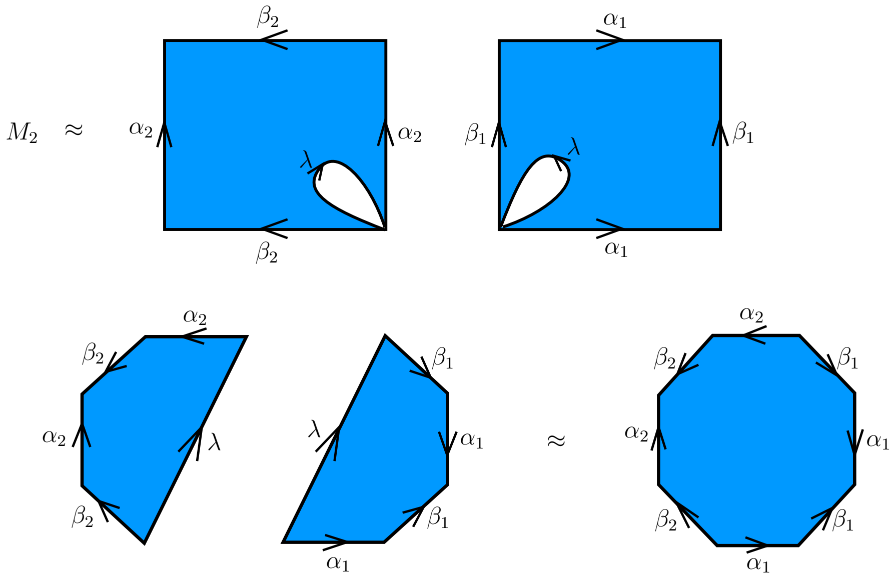




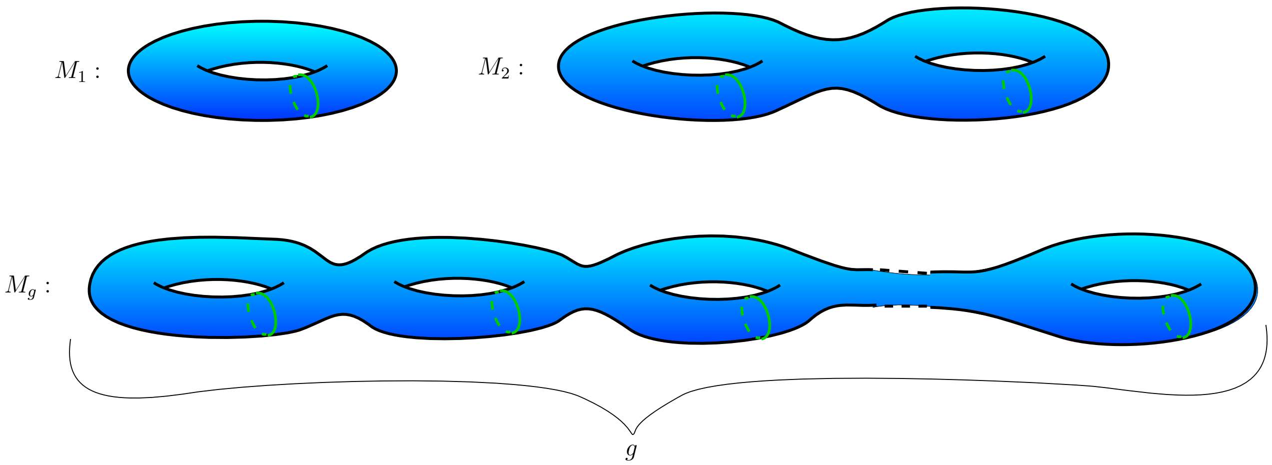
Знамо да M_1, тј. торус, има количнички модел у равни. То је четвороугао са рубном идентификацијом $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$ (в. пример 1.7.6). Нађимо сад количничке моделе у равни и за остале површи M_g, $g \in \mathbb{N}$.



Површ M_2 је, дакле, повезана сума два торуса. Уочимо њихове равнанске количничке моделе – два четвороугла са рубним идентификацијама $\alpha_1\beta_1\alpha_1^{-1}\beta_1^{-1}$, односно $\alpha_2\beta_2\alpha_2^{-1}\beta_2^{-1}$. С обзиром на чињеницу да отворене дискове које избацујемо са ових торуса можемо произвољно да одаберемо, ми ћемо то учинити на начин погодан за сецкање и лепљење. У сваком четвороуглу узимамо (тополошки) диск који је у унутрашњости четвороугла с тим да руб додирује у темену четвороугла, као на слици десно. Сад се, дакле, избаце одговарајући отворени дискови, а граничне кружнице добијених двеју површи међусобно идентификују. Оне онда дају једну кружницу на M_2 (на слици десно, то је кружница λ). Ако ова два четвороугла сецнемо на местима где избачени дискови додирују рубове, онда добијамо два петоугла с одговарајућим идентификацијама на границама. Коначно, њих залепимо по λ и добијамо стандардни количнички модел површи M_2 – осмоугао с рубном идентификацијом $\alpha_1\beta_1\alpha_1^{-1}\beta_1^{-1}\alpha_2\beta_2\alpha_2^{-1}\beta_2^{-1}$.



беремо две дисјунктне Жорданове криве на M_1, њиховим избацивањем би се добио неповезан простор.

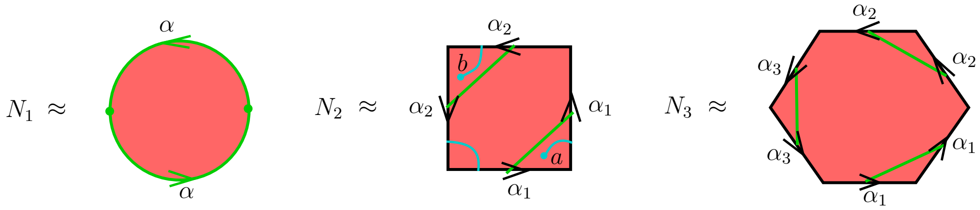


И уопште, род површи M_g ($g \in \mathbb{N}_0$) једнак је управо g. На свакој „ручки” уочимо по једну просту затворену криву, као што је представљено на слици изнад. Јасно је да се уклањањем ових g кривих са M_g добија повезан простор, а може се доказати и да није могуће наћи више од g међусобно дисјунктних Жорданових кривих на M_g чијим се избацивањем не би нарушила повезаност.

Приметимо да је род површи тополошка инваријанта. Наиме, ако је $h : X \to Y$ хомеоморфизам између затворених повезаних површи X и Y, и ако су $c_1, c_2, \ldots, c_d$ међусобно дисјунктне Жорданове криве на X, онда су $h(c_1), h(c_2), \ldots, h(c_d)$ међусобно дисјунктне Жорданове криве на Y, при чему је простор $X \setminus \bigcup_{i=1}^{d} c_i$ повезан ако и само ако је $h\big(X \setminus \bigcup_{i=1}^{d} c_i\big) = Y \setminus \bigcup_{i=1}^{d} h(c_i)$ повезан.

Одавде одмах добијамо да међу површима M_g, $g \in \mathbb{N}_0$, нема међусобно хомеоморфних. Посебно, сфера није хомеоморфна торусу, нити било којој од површи M_g за $g \geqslant 1$. И уопште, дакле, важи импликација: ако је $g_1 \neq g_2$, онда $M_{g_1} \not\approx M_{g_2}$.

И површ N_h ($h \in \mathbb{N}$) има род једнак управо h. На површи N_1, тј. пројективној равни, за просту затворену криву чијим се уклањањем не нарушава повезаност, можемо одабрати баш кружницу α из стандардног количничког модела те површи (на слици ниже, она је обојена зеленом бојом). Знамо да је $N_1 \approx S^2 \sharp \mathbb{R}\mathrm{P}^2$ (јер је сфера неутрал за повезану суму), тј. да се N_1 може добити тако што се диск и Мебијусова трака залепе по хомеоморфизму граница. Приметимо да је крива α заправо централна кружница те Мебијусове траке, а у примеру 1.7.5 утврдили смо да се уклањањем централне кружнице са Мебијусове траке добија цилиндар $S^1 \times (0, 1]$ – дакле, повезан простор.



Имајући у виду ову примедбу, није тешко уочити h међусобно дисјунктних Жордановых кривих на површи N_h чијим се избацивањем добија повезана површ. Наиме,

3 Хомотопија

3.1 Хомотопна пресликавања и хомотопски еквивалентни простори

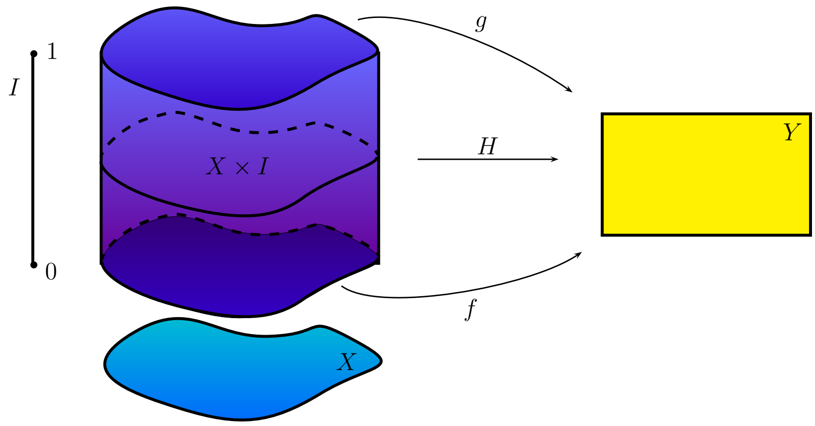
3.1.1 Хомотопна пресликавања

У овој глави, као и у првој, без посебног наглашавања подразумевамо да су $X, Y, Z, \ldots$ тополошки простори.

Дефиниција 147 Нека су $f, g : X \to Y$ непрекидна пресликавања. Кажемо да је f *хомотопно са* g, и пишемо $f \simeq g$, ако постоји непрекидно пресликавање $H : X \times I \to Y$ такво да за свако $x \in X$ важи да је

$$H(x,0) = f(x) \quad \text{и} \quad H(x,1) = g(x).$$

Пресликавање H називамо *хомотопијом између* f *и* g и пишемо $H : f \simeq g$. Још се каже и да H *остварује хомотопију између* f *и* g.



Дакле, хомотопија између f и g јесте непрекидно пресликавање из производа $X \times I$ у Y које се „на висини 0” (тј. на скупу $X \times \{0\}$) поклапа са f, а „на висини 1” (тј. на скупу $X \times \{1\}$) са g. Због тога, неформално говорећи, постојање овакве хомотопије заправо значи да се пресликавање f може непрекидно трансформисати до пресликавања g.

Означимо са $C(X,Y)$ скуп свих непрекидних пресликавања из простора X у простор Y.

Став 148 *Релација $\simeq$ је једна релација еквиваленције на $C(X,Y)$.*

Доказ: Рефлексивност: Ако је $f : X \to Y$ непрекидно пресликавање, онда је и пресликавање $H : X \times I \to Y$ дефинисано са

$$H(x,t) = f(x), \quad (x,t) \in X \times I,$$

$$\begin{tikzcd} X \times I \arrow[r, "p_X"] \arrow[dr, dashed, "H"'] & X \arrow[d, "f"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

такође непрекидно. Наиме, оно је једнако композицији два непрекидна пресликавања – пројекције $p_X : X \times I \to X$ и пресликавања f. При том је, наравно,

$$H(x,0) = H(x,1) = f(x) \quad \text{за све } x \in X,$$

па је, дакле, $H : f \simeq f$.

Симетричност: Претпоставимо да је $f \simeq g$. Нека је $H : X \times I \to Y$ пресликавање које остварује хомотопију између f и g (краће, $H : f \simeq g$). Дефинишемо $G : X \times I \to Y$ на следећи начин:

$$
\begin{tikzcd}
X \times I \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, dashed, "G"'] & X \times I \arrow[d, "H"] \\
& Y
\end{tikzcd}
$$

$$G(x,t) := H(x, 1-t), \quad (x,t) \in X \times I.$$

Пресликавање G је, у ствари, композиција $H \circ \alpha$, где је $\alpha : X \times I \to X \times I$ дефинисано са $\alpha(x,t) = (x, 1-t)$, $(x,t) \in X \times I$. С обзиром на непрекидност оба његова координатна пресликавања, и α је непрекидно (став 71), па је онда и G непрекидно као композиција два непрекидна. Притом, за свако $x \in X$ важи:

$$G(x,0) = H(x,1) = g(x); \quad G(x,1) = H(x,0) = f(x).$$

Дакле, $G : g \simeq f$.

Транзитивност: Нека је $H : f \simeq g$ и $G : g \simeq h$ (где су, наравно, $f, g, h \in C(X,Y)$). Дефинишемо хомотопију $F : X \times I \to Y$ као надовезивање хомотопија H и G. Прецизније,

$$F(x,t) := \begin{cases} H(x, 2t), & 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} \\ G(x, 2t-1), & \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}, \quad (x,t) \in X \times I.$$

Како је за $t = \frac{1}{2}$ (и све $x \in X$) $H(x, 2t) = H(x,1) = g(x) = G(x,0) = G(x, 2t-1)$, то је F исправно дефинисано пресликавање. Рестрикција $F|_{X \times [0, \frac{1}{2}]}$ једнака је композицији $H \circ \varphi$, где је $\varphi : X \times [0, \frac{1}{2}] \to X \times I$ дефинисано са $\varphi(x,t) = (x, 2t)$, $(x,t) \in X \times [0, \frac{1}{2}]$. Пресликавање φ је, очигледно, непрекидно (став 71), па је зато и рестрикција $F|_{X \times [0, \frac{1}{2}]}$ непрекидна. Слично, $F|_{X \times [\frac{1}{2}, 1]} = G \circ \psi$, где је $\psi : X \times [\frac{1}{2}, 1] \to X \times I$, $\psi(x,t) = (x, 2t-1)$, па је $F|_{X \times [\frac{1}{2}, 1]}$ непрекидно као композиција непрекидних. Из чињенице да су скупови $X \times [0, \frac{1}{2}]$ и $X \times [\frac{1}{2}, 1]$ затворени у $X \times I$ (као производи затворених) и да покривају $X \times I$, на основу Теореме о лепљењу (теореме 23), закључујемо да је F непрекидно. Коначно, како је за све $x \in X$

$$
\begin{tikzcd}
X \times [0, \frac{1}{2}] \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, dashed, "F|_{X \times [0, \frac{1}{2}]}"'] & X \times I \arrow[d, "H"] \\
& Y
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X \times [\frac{1}{2}, 1] \arrow[r, "\psi"] \arrow[dr, dashed, "F|_{X \times [\frac{1}{2}, 1]}"'] & X \times I \arrow[d, "G"] \\
& Y
\end{tikzcd}
$$

$$F(x,0) = H(x,0) = f(x) \quad \text{и} \quad F(x,1) = G(x,1) = h(x),$$

то је $F : f \simeq h$. □

Сад ћемо доказати да се релација $\simeq$ лепо слаже с композицијом. Прецизније, важи следеће тврђење.

Став 149 *Нека су $f, g : X \to Y$ непрекидна пресликавања и нека важи $f \simeq g$.*

(а) *Ако је $\varphi : Y \to Z$ непрекидно пресликавање, онда је $\varphi \circ f \simeq \varphi \circ g$.*

(б) *Ако је $\psi : W \to X$ непрекидно пресликавање, онда је $f \circ \psi \simeq g \circ \psi$.*

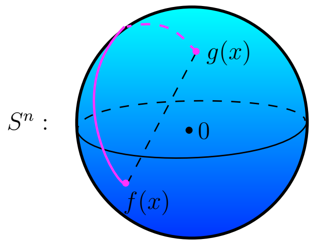
Доказ: Нека је $H : X \times I \to Y$ хомотопија између f и g. Дакле, H је непрекидно и важи да је $H(x,0) = f(x)$ и $H(x,1) = g(x)$ за све $x \in X$.

(а) Уочимо композицију $\varphi \circ H : X \times I \to Z$. Она је непрекидна, а за све $x \in X$ важи

$$\varphi\big(H(x,0)\big) = \varphi\big(f(x)\big) \quad \text{и} \quad \varphi\big(H(x,1)\big) = \varphi\big(g(x)\big),$$

па је, дакле, $\varphi \circ H : \varphi \circ f \simeq \varphi \circ g$.

Дакле, ни за једно $x \in X$, дуж с крајевима $f(x)$ и $g(x)$ не пролази кроз координатни почетак, па зато сваку од тих дужи можемо радијално да пројектујемо на сферу. Прецизније, пошто је $(1-t)f(x)+tg(x) \neq 0$ за све $x \in X$ и све $t \in I$, формулом



$$H(x,t) := \frac{(1-t)f(x)+tg(x)}{\|(1-t)f(x)+tg(x)\|},$$

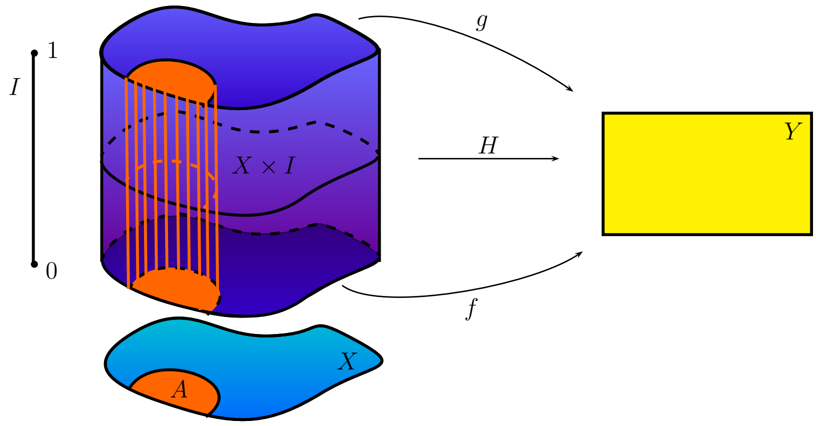
исправно је дефинисано пресликавање $H : X \times I \to S^n$, које је, очигледно, и непрекидно. Сад се рутински проверава да је $H(x,0)=f(x)$ и $H(x,1)=g(x)$ за свако $x \in X$, па закључујемо да је $H : f \simeq g$.

3.1.2 Релативна хомотопија

Дефиниција 150 Нека су $f,g : X \to Y$ непрекидна пресликавања и нека је $A \subseteq X$. Кажемо да је f *хомотопно са* g *релативно* A, и пишемо $f \simeq g \ (\mathrm{rel}\, A)$, ако постоји непрекидно пресликавање $H : X \times I \to Y$ такво да је

$$H(x,0)=f(x), \quad H(x,1)=g(x) \quad \text{за све } x \in X \quad \text{и}$$

$$H(a,t)=f(a)=g(a) \quad \text{за све } a \in A \text{ и све } t \in I.$$



Слично као у дефиницији 147, пресликавање H називамо *хомотопијом релативно* A (или *релативном хомотопијом) између* f *и* g и пишемо $H : f \simeq g \ (\mathrm{rel}\, A)$.

Приметимо да је неопходан услов за $f \simeq g \ (\mathrm{rel}\, A)$ поклапање пресликавања f и g на свим тачкама скупа A ($f|_A = g|_A$). Дакле, ако је $f(a) \neq g(a)$ за бар једно $a \in A$, онда f и g не могу бити хомотопна релативно A. Такође, јасно је да важи и импликација: ако је $f \simeq g \ (\mathrm{rel}\, A)$, онда је $f \simeq g$. Релативна хомотопија је заправо хомотопија која је, приде, и константна на сваком „штапу” $\{a\} \times I$ (где је $a \in A$). Другим речима, за свако $a \in A$, $H(a,t)$ не зависи од t – исто је на свакој висини.

Пример 3.1.3 Ако су $f,g : X \to K$ два непрекидна пресликавања из простора X у конвексан скуп $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) и ако је $A \subseteq X$ такав да се f и g поклапају на A, онда је $f \simeq g \ (\mathrm{rel}\, A)$. Наиме, ако је $H : X \times I \to K$ линијска хомотопија између f и g (в. пример 3.1.1), онда је за све $a \in A$ и све $t \in I$ испуњено

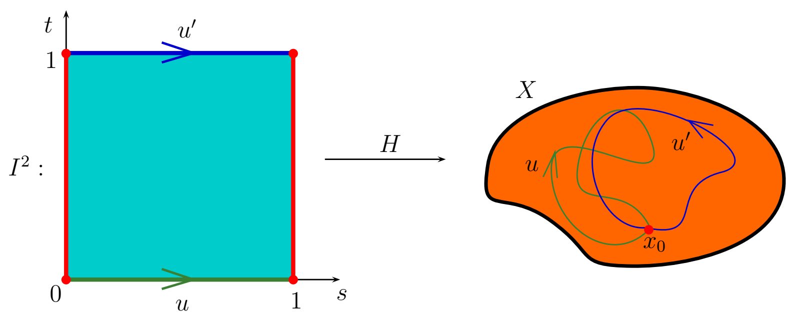
$$H(a,t) = (1-t)f(a)+tg(a) = (1-t)f(a)+tf(a) = (1-t+t)f(a) = f(a) = g(a),$$

јер је $f|_A = g|_A$. Дакле, $H : f \simeq g \ (\mathrm{rel}\, A)$.

Наравно, две петље у тачки x_0 могу се надовезати, а тако добијени пут је опет петља у тачки x_0. Зато је надовезивање петљи $(u, v) \mapsto u \cdot v$ једна бинарна операција на скупу $P(X, x_0)$. Веома важно својство ове операције дато је у следећем ставу.

Став 164 *Нека су* $u, u', v, v' \in P(X, x_0)$ *и нека важи да је* $u \simeq u' \ (\mathrm{rel}\{0,1\})$, $v \simeq v' \ (\mathrm{rel}\{0,1\})$. *Тада је* $u \cdot v \simeq u' \cdot v' \ (\mathrm{rel}\{0,1\})$.

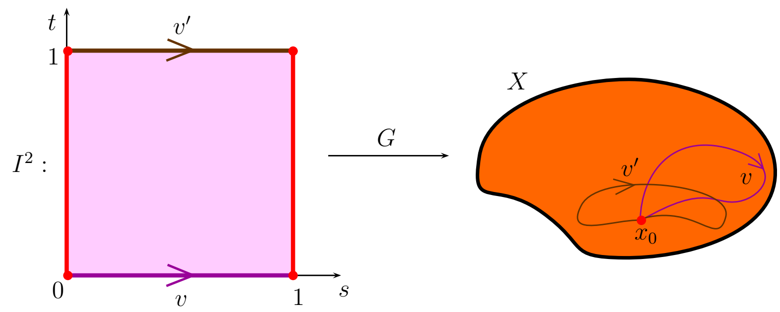
Доказ: Нека је $H : u \simeq u' \ (\mathrm{rel}\{0,1\})$. Како су u и u' петље у тачки x_0, то значи да хомотопија $H : I^2 \to X$ читаве дужи $\{0\} \times I$ и $\{1\} \times I$ (две усправне странице квадрата I^2) пресликава у тачку x_0. Доња водоравна страница $I \times \{0\}$ се, пак, пресликава помоћу петље u, а горња помоћу петље u'. Речју, за све $s \in I$ и све $t \in I$ важи



$$H(s,0) = u(s), \quad H(s,1) = u'(s),$$

$$H(0,t) = H(1,t) = x_0.$$

Слично, ако је $G : I^2 \to X$ хомотопија релативно $\{0,1\}$ између v и v', онда је за све $s \in I$ и све $t \in I$ испуњено



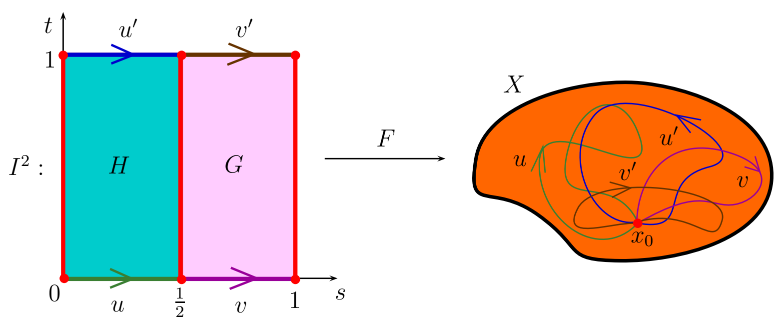
$$G(s,0) = v(s), \quad G(s,1) = v'(s),$$

$$G(0,t) = G(1,t) = x_0.$$

Уочимо пресликавање $F : I^2 \to X$ дефинисано са

$$F(s,t) = \begin{cases} H(2s,t), & 0 \leqslant s \leqslant \frac{1}{2} \\ G(2s-1,t), & \frac{1}{2} \leqslant s \leqslant 1 \end{cases}, \quad (s,t) \in I^2.$$

Оно је заиста добро дефинисано, јер је за $s = \frac{1}{2}$ (и свако $t \in I$) испуњено $H(2s,t) = H(1,t) = x_0 = G(0,t) = G(2s-1,t)$. Пресликавање F је и непрекидно по Теореми о лепљењу. Наиме, рестрикција $F|_{[0,\frac{1}{2}]\times I}$ једнака је композицији $[0, \frac{1}{2}] \times I \xrightarrow{\alpha} I^2 \xrightarrow{H} X$, где је $\alpha(s,t) = (2s,t)$, $(s,t) \in [0,\frac{1}{2}] \times I$, па је и непрекидна као композиција таквих. Слично, $F|_{[\frac{1}{2},1]\times I}$ јесте композиција следећих непрекидних пресликавања: $[\frac{1}{2}, 1] \times I \xrightarrow{\beta} I^2 \xrightarrow{G} X$, где је $\beta(s,t) = (2s-1,t)$, $(s,t) \in [\frac{1}{2},1] \times I$. Уз све то, за пресликавање F важе и једнакости:



$$F(s,0) = \begin{cases} H(2s,0), & 0 \leqslant s \leqslant \frac{1}{2} \\ G(2s-1,0), & \frac{1}{2} \leqslant s \leqslant 1 \end{cases} = \begin{cases} u(2s), & 0 \leqslant s \leqslant \frac{1}{2} \\ v(2s-1), & \frac{1}{2} \leqslant s \leqslant 1 \end{cases} = (u \cdot v)(s), \quad s \in I;$$

$$F(s,1)=\begin{cases} H(2s,1), & 0\leqslant s\leqslant \frac12\\ G(2s-1,1), & \frac12\leqslant s\leqslant 1\end{cases} = \begin{cases} u'(2s), & 0\leqslant s\leqslant \frac12\\ v'(2s-1), & \frac12\leqslant s\leqslant 1\end{cases} = (u'\cdot v')(s), \quad s\in I;$$

$$F(0,t)=H(0,t)=x_0, \quad F(1,t)=G(1,t)=x_0, \quad t\in I.$$

Закључујемо да је $F : u\cdot v \simeq u'\cdot v'$ $(\mathrm{rel}\{0,1\})$. □

На основу става 151, релација $\simeq$ $(\mathrm{rel}\{0,1\})$ јесте једна релација еквиваленције на $P(X,x_0)$. Означимо одговарајући количнички скуп са $\pi_1(X,x_0)$. Дакле,

$$\pi_1(X,x_0) := P(X,x_0)/\simeq (\mathrm{rel}\{0,1\}),$$

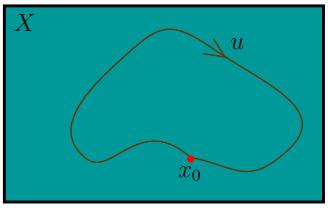
типичан елемент скупа $\pi_1(X,x_0)$ јесте $[u]$, где је u петља у тачки x_0, док за две петље u и u' важи да је $[u]=[u']$ у $\pi_1(X,x_0)$ ако и само ако је $u\simeq u'$ $(\mathrm{rel}\{0,1\})$.

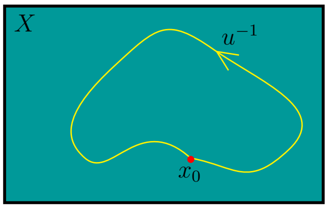
Из управо доказаног става 164 закључујемо да надовезивање петљи у $P(X,x_0)$ индукује бинарну операцију на количничком скупу $\pi_1(X,x_0)$. Ако ту операцију означимо са $*$, онда је за $[u],[v]\in\pi_1(X,x_0)$

$$[u]*[v] := [u\cdot v].$$

Операција $* : \pi_1(X,x_0)\times\pi_1(X,x_0)\to\pi_1(X,x_0)$, дакле, исправно је дефинисана (другим речима, резултат $[u\cdot v]$ не зависи од избора представника класа $[u]$ и $[v]$) на основу става 164 – ако је $[u]=[u']$ и $[v]=[v']$, онда је и $[u\cdot v]=[u'\cdot v']$.

Означимо још са $c_{x_0} : I\to X$ константну петљу ($c_{x_0}(t) = x_0$ за све $t\in I$), а за дату петљу $u\in P(X,x_0)$, означимо са $u^{-1} : I\to X$ петљу која прође истим путем као и петља u, али у супротном смеру. Прецизније, $u^{-1}(t) := u(1-t)$, $t\in I$. Иако је то сасвим јасно, напоменимо ипак да овако дефинисано пресликавање u^{-1} није пресликавање инверзно пресликавању u (то инверзно пресликавање, заправо, и не постоји, јер је u петља, па није „1-1”), мада се употребљава иста ознака. Из формулације предстојеће теореме, пак, одмах ће бити јасно зашто се користи баш та ознака за ову петљу.





Теорема 165 *Скуп $\pi_1(X,x_0)$ јесте група у односу на операцију $*$. Њен неутрал је $[c_{x_0}]$, док за инверз $[u]^{-1}$ елемента $[u]\in\pi_1(X,x_0)$ важи да је $[u]^{-1}=[u^{-1}]$.*

Доказ: Асоцијативност: Нека су $u,v,w\in P(X,x_0)$ три произвољне петље у тачки x_0. Треба доказати да је $([u]*[v])*[w]=[u]*([v]*[w])$, тј. да је

$$(u\cdot v)\cdot w\simeq u\cdot(v\cdot w)\ \ (\mathrm{rel}\{0,1\}). \tag{18}$$

За петљу $(u\cdot v)\cdot w : I\to X$ важи да је

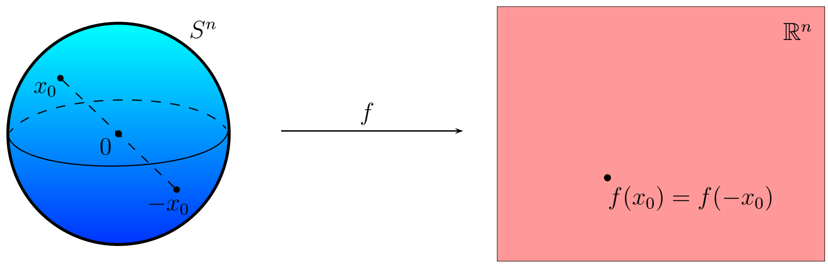
$$\big((u\cdot v)\cdot w\big)(t)=\begin{cases}(u\cdot v)(2t), & 0\leqslant t\leqslant\frac12\\ w(2t-1), & \frac12\leqslant t\leqslant 1\end{cases}=\begin{cases}u(2\cdot 2t), & 0\leqslant 2t\leqslant\frac12\\ v(2\cdot 2t-1), & \frac12\leqslant 2t\leqslant 1\\ w(2t-1), & \frac12\leqslant t\leqslant 1\end{cases}=\begin{cases}u(4t), & 0\leqslant t\leqslant\frac14\\ v(4t-1), & \frac14\leqslant t\leqslant\frac12\\ w(2t-1), & \frac12\leqslant t\leqslant 1\end{cases}.$$

Дакле, сегмент I се подели на три дела – на сегменте $[0,\frac14]$, $[\frac14,\frac12]$ и $[\frac12,1]$. Први од њих је резервисан за петљу u, други за v, трећи за w. Сваки од ових сегмената се, у ствари, напоменимо да су примери таквих простора сфере димензије веће од један. Наиме, Брауерова теорема (коју нисмо доказали у вишим димензијама) даје нам да ниједна сфера није контрактибилна, а може се доказати и да је свака сфера димензије бар два просто повезана (нпр. $\pi_1(S^2) = 0$ иако S^2 није контрактибилна).

3.6 Борсук–Уламова теорема

Једна од најпознатијих тополошких теорема јесте следећа, *Борсук–Уламова теорема.*

Теорема 192 *Нека је $n \in \mathbb{N}$ и $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ непрекидно пресликавање. Тада постоји $x_0 \in S^n$ такво да је $f(x_0) = f(-x_0)$.*



Дакле, кад год имамо непрекидно пресликавање из сфере S^n у еуклидски простор $\mathbb{R}^n$, на сфери постоји пар антиподалних тачака које имају исту слику при том пресликавању. Занимљива примена Борсук–Уламове теореме за $n = 2$ добија се кад се посматра (непрекидна) функција која сваком месту на земаљској кугли додели следећи пар реалних бројева: температуру и ваздушни притисак на том месту (у одређеном временском тренутку). Добија се чињеница да у сваком тренутку постоје две антиподалне (дијаметрално супротне) тачке на Земљи са истом температуром и истим ваздушним притиском.

Као и у случају Брауерове теореме, и овде ћемо најпре навести неколико тврђења еквивалентних тврђењу Борсук–Уламове теореме (и доказати те еквиваленције), а онда дати доказ ове теореме за случајеве $n = 1$ и $n = 2$.

Ради формулације тих тврђења, дефинишимо један једноставан појам.

Дефиниција 193 Нека су $m, n \in \mathbb{N}_0$. За пресликавање $g : S^m \to S^n$ кажемо да је *непарно* ако за све $x \in S^m$ важи да је $g(-x) = -g(x)$.

Наведимо један једноставан пример (непрекидног) непарног пресликавања, које ће се појављивати и у доказу наредне теореме. Ако су $m, n \in \mathbb{N}$ и $m \geqslant n$, нека је $i : S^n \to S^m$ природно утапање сфере S^n у сферу S^m,

$$i(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = (x_1, x_2, \dots, x_{n+1}, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{m-n}), \quad (x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in S^n.$$

Лако се види да је i једно непарно пресликавање. Наиме, за све $(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in S^n$ је

$$\begin{aligned} i\big(-(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})\big) &= i(-x_1, -x_2, \dots, -x_{n+1}) \\ &= (-x_1, -x_2, \dots, -x_{n+1}, 0, 0, \dots, 0) \\ &= -(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}, 0, 0, \dots, 0) \\ &= -i(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}). \end{aligned}$$