Универзитет у Београду – Математички факултет

Зоран Станић

ДИСКРЕТНЕ СТРУКТУРЕ 2

ОСНОВИ КОМБИНАТОРИКЕ, ТЕОРИЈЕ БРОЈЕВА И ТЕОРИЈЕ ГРАФОВА

2. ИЗДАЊЕ

Београд, 2020.

проф. др Зоран Станић, Математички факултет – Београд
ДИСКРЕТНЕ СТРУКТУРЕ 2
2. издање

Издавач: Математички факултет, Студентски трг 16, Београд
За издавача: *проф. др Зоран Ракић*
Издавачки одбор: *проф. др Милош Арсеновић*, председник
проф. др Олга Атанацковић
проф. др Мирјана Ђорић
проф. др Предраг Јаничић
проф. др Зоран Петровић
Рецензенти: *академик проф. др Драгош Цветковић*
проф. др Александар Савић

Штампа и повез: Донат граф, Београд
Тираж: 300
ISBN: 978-86-7589-142-0
MSC 2020: 05A[05, 10, 15, 17, 18, 19]; 05C[05, 07, 10, 12, 15, 20, 30, 45
60, 62, 85]; 11A[05, 07, 41, 51]; 11B[37, 39, 65, 68, 73]

CIP – Каталогизација у публикацији
Народна библиотека Србије, Београд

519.1(075.8)
511.1(075.8)

СТАНИЋ, Зоран, 1975-
Дискретне структуре 2 : основи комбинаторике, теорије бројева и теорије графова / Зоран Станић. – 2. изд. – Београд : Математички факултет, 2018 (Београд : Донат граф). – 207 стр. : илустр. ; 25 цм.

На врху насл. стр.: Универзитет у Београду. – Тираж 300. – Напомене уз текст. – Библиографија: стр. 197-199. – Регистри: ISBN 978-86-7589-142-0 а) Комбинаторна анализа б) Теорија бројева COBISS.SR-ID 14564361.

Текст је обрађен ауторски уз примену програмског пакета LaTeX.

Садржај

Предговор

Овај уџбеник заснован је на предавањима која аутор од 2013. године држи у складу са програмом предмета *Дискретне структуре 2* који се слуша на првој години модула *Информатика* Математичког факултета у Београду. Рукопис у потпуности покрива теоријски садржај предмета, садржи примере и задатке, али не и решења задатака, те отуда не покрива и вежбе из истог предмета.

За праћење садржаја неопходно је знање из средње школе као и познавање неких делова линеарне алгебре и математичке анализе који се уче у оквирима уводних курсева разних факултета.

Дискретна математика изучава структуре и релације дефинисане на коначним или пребројивим скуповима. У оквиру таквих изучавања можемо срести делове теорије скупова, логике, комбинаторике, теорије бројева, теорије графова, вероватноће, теорије кодова, формалних језика, аутомата и сродних области. Посебно, коначност меморије рачунара и чињеница да су савремени рачунари дискретна рачунска средства намећу потребу за развојем математичког апарата који би служио за решавање проблема који се ту јављају. Стога дискретна математика представља неизоставну основу свих рачунарских наука и као таква налази се у распоредима почетних семестара на факултетима који су оријентисани ка математичким или рачунарским дисциплинама.

У овој књизи обрађене су три подобласти дискретне математике: комбинаторика, елементарна теорија бројева и теорија графова.

У оквиру комбинаторике обрађене су основне технике за израчунавање сума, пребројавања елемената, биномни коефицијенти и идентитети, четири основне врсте избора елемената, генерисања пермутација и комбинација елемената, те функције генератрисе (са применама у доказивању биномних идентитета).

У оквиру елементарне теорије бројева обрађена је дељивост бројева, затим композиције и партиције бројева, рекурентне једначине (са акцентом на линеарне рекурентне једначине и њихове примене у партицијама скупова), Фибоначијеви и сродни низови бројева, те Каталанови и Бернулијеви бројеви.

У делу посвећеном теорији графова може се пронаћи нешто дужи увод у теорију који обухвата основне типове графова, инваријанте, операције над графовима и њихове репрезентације (са освртом на репрезентације у рачунарским системима). Наставак обухвата стабла, алгоритме за претраге графова, кодирање и декодирање означених стабала, одређивање минималних разапињућих стабала тежинских графова, Ојлерове мултиграфове и Флеријев алгоритам за одређивање Ојлеровог циклуса, Хамилтонове графове и проблем трговачког путника, планарне графове, проблеме спаривања у графовима, бојења графова и одређивање растојања у усмереним тежинским графовима.

Будући да је ова књига првенствено намењена студентима Математичког факултета, она садржи низ дефиниција, тврђења, доказа, примера, те задатака на крају сваке целине. Додатно, пошто се ради о студентима информатичког модула, неки формални докази су изостављени, а значајнија пажња посвећена је алгоритмима и њиховим применама.

Сви алгоритми презентовани су на неки од следећа три начина. Уколико је могуће у неколико реченица описати алгоритам – то смо тако и чинили (рецимо, у случају алгоритама за претраге графова датих у Пододељку 3.2.3). Код неких алгоритама наводили смо све појединачне кораке (на пример, у случају алгоритама за генерисање пермутација датих у Пододељку 1.5.1). Напослетку, користили смо и једноставан псеудокод за запис алгоритама (рецимо, у случају алгоритама за кодирање и декодирање означених стабала датих у Пододељку 3.3.2). Разлог за овакве приступе, наравно, лежи у жељи да сваки алгоритам наведемо у форми која је најједноставнија за памћење.

Књига је подељена на четири дела, делови на одељке, а одељци на пододељке. У оквиру нултог дела дати су основни појмови теорије скупова и функција који су неопходни за праћење онога што следи. Први део посвећен је комбинаторици и истовремено представља основу за читање наредна два дела, други део посвећен је теорији бројева, а трећи теорији графова. Сваки одељак потоња три дела књиге је једна засебна целина која почиње кратким текстуалним уводом, а завршава задацима предвиђеним за самостални рад. Успешно решавање задатака чини неопходан услов за констатацију да је градиво коректно усвојено. На крају књиге, поред стандардног индекса појмова и тврђења, дат је и индекс алгоритама.

У припреми материјала за предавања, а потом и у припреми ове књиге, коришћена је широка литература у оквиру које се издвајају књиге Андерсона [1], Бигса [4], Бондија и Мартија [5], Цветковића [7], Цветковића и Симића [9], Дистела [13], Мазура [26], Стевановића, Балтића, Симића и Ћирића [31], Валиса [36] и Веста [37].

Аутор се захваљује својим бившим студентима Николи Ајзенхамеру и Ањи Букуров који су, на основу белешки са предавања, сачинили рукопис који је иницирао писање ове књиге. Затим, рецензентима Драгошу Цветковићу и Александру Савићу који су дали већи број корисних савета. И напослетку, Недељку Стефановићу и Маријани Терзовић који су прочитали неке делове рукописа и, такође, дали корисне савете.

Друго издање разликује се у свега неколико техничких корекција.

-0-

Укратко о скуповима и функцијама

У оквиру овог дела даћемо кратко подсећање на скупове и функције, као и ознаке које ћемо надаље користити. Уз садржај овог дела и претпостављено познавање средњошколске математике читалац ће лакше пратити излагања која следе.

0.1 Скупови

Скуп је основни математички појам који се уводи аксиоматски. Интуитивно, скуп може бити схваћен као колекција објеката које називамо *елементи скупа*. Сваки скуп јединствено је одређен тиме који му елементи припадају, а који не.

За означавање скупова најчешће користимо велика слова латинице $A, B, \ldots, Z$. Уколико елемент a припада скупу A, то записујемо као $a \in A$. У супротном, $a \notin A$. Приликом задавања скупова може се користити запис

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$$

или

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\},$$

уз претпоставку да је начин набрајања елемената јасан из контекста. Поредак записа елемената у скупу није битан. Скуп A чији су елементи тачно они објекти који имају задато својство α записујемо као

$$A = \{x \mid \alpha(x)\}.$$

Ово су били једноставни начини описивања (или задавања) скупа (набрајањем елемената или навођењем правила које одређује да ли му неки елемент припада или не). У наставку ћемо се сретати и са другачијим описима.

Празан скуп је скуп који нема елемената. Њега означавамо са $\emptyset$.

Пример 0.1.1. Скупови којима ћемо се често бавити су скуп природних бројева $\mathbb{N}$, скуп целих бројева $\mathbb{Z}$, скуп рационалних бројева $\mathbb{Q}$ и скуп реалних бројева $\mathbb{R}$.

Скуп простих бројева може бити записан на следећи начин:

$$\{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 2 \wedge (\forall a, b \in \mathbb{N}) : ab = n \Rightarrow a = 1 \vee b = 1\}.$$

Скуп

$$\{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge (\exists a, b, c \in \mathbb{N}) : a^n + b^n = c^n\}$$

једнак је скупу $\{1, 2\}$ што је (никако очигледан) теоријски резултат (видети [29]). Овај резултат познат је као *Фермаова велика теорема* коју је Ферма[1] формулисао 1637. године. Доказ теореме дао је Вајлс[2] више од 350 година касније.

Нека су надаље A и B неки скупови. Уколико скуп A садржи све елементе које садржи скуп B, тада кажемо да је скуп B *подскуп* скупа A и то означавамо са $B \subseteq A$. Истовремено кажемо да је скуп A *надскуп* скупа B. Празан скуп је подскуп сваког скупа и, такође, сваки скуп је свој подскуп.

Уколико скуп A садржи све елементе које садржи скуп B и, додатно, садржи још барем један елемент који не припада скупу B, тада кажемо да је скуп B *прави подскуп* скупа A и то означавамо са $B \subset A$. Истовремено кажемо да је скуп A *прави надскуп* скупа B.

Подскуп $\{1, 2, \ldots, n\}$ скупа $\mathbb{N}$ надаље ћемо означавати са $\mathbb{N}_n$. Користићемо такође и ознаку $\mathbb{N}^*$ којом ћемо означавати скуп $\mathbb{N}$ проширен нулом, то јест $\mathbb{N} \cup \{0\}$.

Скупови A и B су *једнаки*, у ознаци $A = B$, ако и само ако важи $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$.

Напомена 0.1.2. Овде је битно напоменути да чињеница да је празан скуп подскуп сваког скупа не значи да је он елемент сваког скупа. Празан скуп и скуп чији је једини елемент празан скуп међусобно се разликују.

Сада када смо се упознали са скуповима, прелазимо на операције над њима.

[1] Пјер де Ферма (Pierre de Fermat, 1601–1665) – француски математичар.
[2] Ендру Џон Вајлс (Andrew John Wiles, 1953) – енглески математичар.

-1-

Комбинаторика

У овом делу упознаћемо се са основима комбинаторике, области математике која оперише над највише пребројивим скуповима. Комбинаторни проблеми могу се сусрести у разним областима класичне математике, рачунарства и неких других наука.

Прецизније, изложићемо један део теорије која припада класичној комбинаторици. Оно што следи може се у сличној форми пронаћи у широкој литератури (додуше, мање заступљеној на српском језику), видети на пример [1, 4, 31, 34, 36]. Излагање ћемо започети сумама реалних бројева, а завршити функцијама генератрисама.

1.1 Суме

Овај одељак садржи терминологију и нотацију која се односи на суме реалних бројева, рачунска правила, технике за њихово израчунавање и неке стандардне суме. Ови резултати биће често коришћени у ономе што следи.

1.1.1 Нотација и основна правила

Ако је дат коначан низ $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, онда његову *суму* $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ записујемо као

$$\sum_{i=1}^{n} a_i. \tag{1.1}$$

Сума

$$\sum_{i=1}^{n} i \tag{1.2}$$

је ништа друго до сума првих n природних бројева. Читалац ће се вероватно сетити једноставног метода за израчунавање овакве суме (у функцији од n) који асоцира на Гауса[4] и своди се на специфично груписање сабирака. Наиме, важе једнакости

$$\begin{aligned} 2\sum_{i=1}^{n} i = {} & 2(1+2+\ldots+n) = (1+n)+(2+n-1)+\ldots+(n+1) \\ = {} & n(n+1), \end{aligned}$$

одакле следи $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$. Размотримо још један пример.

Пример 1.1.1. Докажимо да је сума првих n непарних бројева једнака n^2, то јест да важи

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2.$$

Овај доказ извешћемо методом математичке индукције. Једнакост очигледно важи за $n = 1$ (што је база индукције). Претпоставимо да она важи у случају суме првих $n-1$ непарних бројева (индуктивна хипотеза) и докажимо да важи и за n (индуктивни корак). Важи следећи низ једнакости:

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = \sum_{i=1}^{n-1}(2i-1) + 2n - 1 = (n-1)^2 + 2n - 1 = n^2,$$

при чему смо у другој једнакости применили индуктивну хипотезу.

Поред облика (1.1), у специфичним ситуацијама у којима је јасно о каквој суми се ради, користићемо и запис суме без експлицитног навођења горњег и доњег индекса, то јест

$$\sum_{i} a_i.$$

Нешто чешће сретаћемо се са сумама код којих се сумирање врши по елементима неког скупа. На пример, суму (1.2) могли смо записати и као $\sum_{i \in \mathbb{N}_n} i$. Слично томе, уколико са S означимо скуп простих

[4] Јохан Карл Фридрих Гаус (Johann Carl Friedrich Gauss, 1777–1855) – немачки математичар.

-2-

Елементарна теорија бројева

Теорија бројева једна је од најстаријих математичких области која изучава својства бројева и релације међу њима. Овде ћемо изложити неке основне елементе ове теорије. Излагање ћемо започети причом о дељивости бројева, а завршити рекурентним једначинама и специфичним низовима.

2.1 Дељивост бројева

У овом одељку бавићемо се дељивошћу природних бројева. Даћемо формалне доказе неких тврђења за која претпостављамо да су читаоцу позната од раније, навешћемо алгоритме за израчунавање највећег заједничког делиоца два броја и доказати основну теорему аритметике (о факторизацији броја на просте факторе). Одељак ћемо закључити још једним тврђењем познатим као кинеска теорема о остацима.

2.1.1 Дефиниција, нотација и основна својства

Исказ да природан број k дели природан број n записујемо у облику $k|n$. Прецизније, рећи ћемо да *k дели n*, ако постоји природан број q такав да важи $qk = n$. У таквој ситуацији кажемо да је број k *делилац* или *фактор* броја n. Репрезентацију природног броја у виду производа (неких) његових фактора називамо *факторизацијом* тог броја. Са простим бројевима, то јест оним природним бројевима који су дељиви са тачно два природна броја, већ смо се сусрели. Дељивост бројева можемо једноставно проширити на целе бројеве тако што ћемо рећи да сваки број дели нулу (што не одступа од претходне дефиниције дељивости природних бројева, будући да за свако k важи $0 \cdot k = 0$) и да за два цела броја важи $k|n$ уколико то важи за њихове апсолутне вредности.

Наредне чињенице се једноставно проверавају:

- $(\forall k, n \in \mathbb{N}) : k|n \Rightarrow k \leq n$,
- $(\forall k, m, n \in \mathbb{Z}) : k|m \wedge k|n \Rightarrow k|(m+n)$,
- $(\forall k, m, n \in \mathbb{Z}) : k|m \wedge k|n \Rightarrow k|mn$.

Докажимо сада следећу теорему.

Теорема 2.1.1. *За* $k \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$ *и* $n \in \mathbb{Z}$ *постоје јединствени цели бројеви* q *и* r *за које важи* $0 \leq r < |k|$ *и*

$$n = qk + r. \tag{2.1}$$

Доказ. Докажимо најпре да бројеви q и r постоје. Претпоставимо да важи $k > 0$, $n \geq 0$ и докажимо тврђење индукцијом по n. Уколико важи $n < k$, онда су $q = 0$ и $r = n$ тражени цели бројеви. За $n \geq k$, претпоставимо да тврђење важи за све природне бројеве мање од n. У том случају, пошто важи $n-k \geq 0$ и $n-k < n$, тврђење важи за $n-k$, па дакле постоје бројеви q' и r који задовољавају једнакост $n-k = q'k + r$. Заменом q' са $q-1$ у претходној једнакости добијамо да важи $n = qk+r$. Ако је неки од бројева k, n негативан, доказ је сличан.

Докажимо сада јединственост репрезентације $n = qk + r$, уз услов из формулације теореме. Претпоставимо супротно, то јест да важи

$$n = qk + r \;\text{ и }\; n = q'k + r',$$

уз услов $0 \leq r < r' < |k|$. (Без губљења на општости можемо претпоставити да су бројеви r и r' различити, јер у супротном одмах добијамо $q = q'$.) Тада важи и $(q'k + r') - (qk + r) = 0$, а отуда следи $r' - r = (q - q')k$, што нас доводи до закључка да важи

$$k|(r' - r).$$

У том случају, постоји природан број q'' такав да важи $r' - r = q''|k|$, одакле следи $r' \geq r' - r \geq |k|$, што је у супротности са претпоставком да важи $r' < |k|$. ■

Број q из једнакости (2.1) називамо *количник*, број r *остатак*, а број k *модул* (при дељењу n са k).

Надаље ћемо се ограничити на ненегативне целе бројеве, то јест претпоставићемо да важи $n \in \mathbb{N}^*$ и $k \in \mathbb{N}$. Количник ћемо записивати и

-3-

Теорија графова

Теорија графова је релативно нова математичка област. Иако се са нечим што називамо графом можемо сусрести и у ранијим резултатима (видети почетак Одељка 3.5), значајнији развој теорије јавља се у другој половини XIX века. За ову теорију карактеристична је широка примена у рачунарским, физичким, хемијским, биолошким, техничким, економским, организационим, социјалним и другим наукама. Више детаља може се пронаћи у [16, 17, 22], а неке примене навешћемо и у оквиру овог дела књиге.

У ономе што следи бавићемо се делом теорије графова који се ослања и надовезује на неке од садржаја Дела 1. Излагање ћемо започети основним појмовима, а затим ћемо се упознати са неким типовима графова. Након тога постепено ћемо се упознавати са многим предметима изучавања ове теорије. Посебну пажњу посветићемо алгоритмима и њиховим применама.

3.1 Основни појмови

У оквиру овог одељка упознаћемо се са свим типовима графова које ћемо касније изучавати. Објаснићемо када за графове кажемо да су изоморфни и дефинисати инваријанте графа. Навешћемо низ других дефиниција и примера, а излагање ћемо закључити матричним репрезентацијама графова.

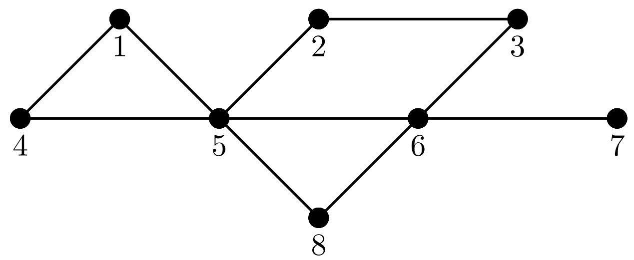
Претпостављамо да читалац има неку представу о графовима (то јест, да му је познато да се ради о неким дискретним структурама које се састоје од чворова повезаних гранама). У применама, чворови репрезентују неке објекте (који могу бити географске локације, јединице организационог система, делови хемијског једињења, особе или групе особа, и слично), а гране релације између тих објеката при чему постојање релације зависно од ситуације може представљати географску повезаност, комуникациони канал, могућност трансфера робе, и слично.

Посебно, многи проблеми са којима се сусрећемо у рачунарству могу се моделирати графовима. Неки од њих су конструкција рачунарских мрежа, организација и заштита података, развој вештачке интелигенције, проток информација, анализа слика и препознавање облика, сложеност алгоритама, кодирања и израчунавања. На пример, структура целокупне интернет мреже може бити представљена графом тако да је свака појединачна локација представљена нечим што називамо чвор графа, а уколико су локације повезане хиперлинковима тада су одговарајући чворови графа повезани гранама. У складу овим примером, јасно је да алгоритми који се разматрају у оквиру теорије графова представљају значајну целину теорије алгоритама. Следе формалне дефиниције и нотација.

3.1.1 Типови графова

Прост граф или само *граф* је уређени пар $G = (V, E)$ који се састоји од скупа V чије елементе називамо *чворови* и скупа E који чине двочлани подскупови скупа чворова, а чије елементе називамо *гране*. Уколико је потребно назначити о којем графу се ради, скуп чворова и скуп грана означаваћемо и са $V(G)$, односно $E(G)$.

Сматраћемо да је скуп чворова графа непразан и коначан. У таквој ситуацији број чворова графа означавамо са n ($n \in \mathbb{N}$), док број грана означавамо са m ($m \in \mathbb{N}^*$).



Слика 3.1: Пример (простог) графа.

Дакле, граф је једна релациона математичка структура чији се чворови u и v налазе у релацији уколико скуп E садржи елемент $\{u, v\}$. У раду са графовима ретко када се користи скуповна терминологија из претходне дефиниције и одговарајућа нотација, а граф се најчешће

Литература

[1] J. A. Андерсон: *Дискретна математика с комбинаториком*, ЦЕТ, Београд, 2005.

[2] G. E. Andrews: *The Theory of Partitions*, Cambridge University Press, Cambridge, 1984.

[3] J. Bernoulli: *Ars Conjectandi, Opus Posthumum*, Thurneysen Brothers, Basel, 1713.

[4] N. L. Biggs: *Discrete Mathematics* (second edition), Oxford University Press, Oxford, 2003.

[5] J. A. Bondy, U. S. R. Murty, *Graph Theory*, Springer, Berlin, 2011.

[6] N. Christofides: *Graph Theory – An Algorithmic Approach*, Academic Press, London, 1975.

[7] Д. Цветковић: *Теорија графова и њене примене*, Научна књига, Београд, 1990.

[8] D. Cvetković, V. Dimitrijević, M. Milosavljević: *Variations on the Travelling Salesman Theme*, Libra Produkt, Beograd, 1996.

[9] Д. Цветковић, С. Симић: *Комбинаторика – класична и модерна*, Научна књига, Београд, 1990.

[10] D. Cvetković, S. K. Simić: *Graph Spectra in Computer Science*, Linear Algebra Appl., **434** (2011), 1545–1562.

[11] D. Cvetković, P. Rowlinson, S. K. Simić: *An Introduction to the Theory of Graph Spectra*, Cambridge University Press, Cambridge, 2010.

[12] H. T. Davis: *The Summation of Series*, Principia Press of Trinity University, San Antonio, 1962.

[13] R. Diestel: *Graph Theory* (third edition), Springer, Berlin, 2006.

[14] L. Euler: *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*, Comment. Acad. Sci. Petropolitanae, **8** (1741), 128–140.

[15] S. Even: *Graph Algorithms* (second edition), Cambridge University Press, New York, 2012.

[16] L. R. Foulds: *Graph Theory Applications*, ISTE/John Wiley and Sons, London, 2009.

[17] J.-C. Fournier: *Graph Theory and Applications with Exercises and Problems*, Springer, New York, 1992.

[18] G. Gutin, A. P. Punnen (eds.): *The Traveling Salesman Problem and its Variations*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2002.

[19] G. H. Hardy, E. M. Wright: *An Introduction to the Theory of Numbers* (sixth edition), Oxford University Press, Oxford, 2008.

[20] H. Hudson: *Four Colors Do Not Suffice*, Amer. Math. Montly, **110** (2003), 417–423.

[21] A. S. Ismail, R. Hasni, K. G. Subramanian: *Some applications of Eulerian graphs*, Int. J. Sci. Math. Educ., **8** (2009), 1–10.

[22] J. W. Kennedy, L. V. Quintas: *Applications of Graphs in Chemistry and Physics*, North-Holland, Amsterdam, 1988.

[23] W. Kocay, D. L. Kreher: *Graphs, Algorithms and Optimization* (second edition), Chapman and Hall/CRC Press, Boca Raton, 2005.

[24] B. M. Landman, A. Robertson: *Ramsey Theory on the Integers* (second edition), American Mathematical Society, New York, 2014.

[25] R. B. Mallion: *The Six (or Seven) Bridges of Kaliningrad: A Personal Eulerian Walk, 2006*, MATCH Commun. Math. Comput. Chem., **58** (2007), 529–556.

[26] D. R. Mazur: *Combinatorics – A Guided Tour*, The Mathematical Association of America, New York, 2010.

[27] Н. Митић: *Увод у организацију рачунара*, Математички факултет, Београд, 2013.

[28] J. Riordan: *Combinatorial Identities*, John Wiley, New York, 1968.

[29] T. Saito: *Fermat's Last Theorem: The Proof*, American Mathematical Society, Providence, 2014.

[30] Z. Stanić: *Regular Graphs. A Spectral Approach*, De Gruyter, Berlin, 2017.

[31] Д. Стевановић, В. Балтић, С. Симић, М. Ћирић: *Дискретна математика – Основе комбинаторике и теорије графова*, Друштво Математичара Србије, Београд, 2008.

[32] Д. Стевановић, М. Милошевић, В. Балтић: *Дискретна математика – Збирка решених задатака*, Друштво Математичара Србије, Београд, 2004.

[33] S. Vajda: *Fibonacci and Lucas Numbers, and the Golden Section: Theory and Applications*, Dover Publications, Mineola, 2008.

[34] Д. Вељан: *Комбинаторика с теоријом графова*, Школска књига, Загреб, 1989.

[35] N. N. Vorobiev: *Fibonacci Numbers* (sixth edition), Springer, Basel, 2002.

[36] W. D. Wallis: *A Beginner's Guide to Discrete Mathematics* (second edition), Springer Science+Busniss Media, New York, 2012.

[37] D. B. West: *Introduction to Graph Theory*, Prentice Hall, New York, 1996.