УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Слободанка Јанковић • Бојана Милошевић

Елементи финансијске математике

—Уџбеник са задацима —

Београд, 2017.

др Слободанка Јанковић, редовни професор
др Бојана Милошевић, доцент
Математички факултет

ЕЛЕМЕНТИ ФИНАНСИЈСКЕ МАТЕМАТИКЕ

Прво издање

Издавач: Математички факултет, Студентски трг 16, Београд

За издавача: проф. др Зоран Ракић

Рецензенти: проф. др Весна Јевремовић
доц. др Миљан Кнежевић

Штампа и повез: Донат граф, Београд

Тираж: 200 примерака

УДК: 519.86

MSC (2010): 91-01, 91G10, 91G20, 91G30, 91G70, 62P05

Увод

У финансијској математици, па стога и у овом курсу, проучавају се појмови и појаве, како детерминистичке тако и стохастичке природе. У стохастичком делу изучавају се различите врсте вредносних папира, чија вредност у будућности зависи од случајних фактора. На почетку, бавимо се моделирањем цена акција преко геометријског Брауновог кретања. Затим изучавамо такозване *деривате*, вредносне папире, који се односе на акције и чија се цена изводи из цене одговарајућих акција (које се у том случају зову *подлога*). Главни деривати су *опције*, које могу бити *куповне* и *продајне*. Опција је вредносни папир, који представља уговор између две стране, а односи се на акције. Куповна опција даје право, али не и обавезу, да се у договорено време по договореној цени купи одређен број акција. Продајна опција даје право, али не и обавезу, да се у договорено време по договореној цени прода одређени број акција. Ово се ради у циљу добијања профита и у циљу обезбеђивања од ризика. Пошто опција носи потенцијалну добит, питање је како одредити фер цену, која ће да задовољи и купца и продавца опције. Изведена је чувена формула Блека и Шолса за израчунавање цене опција. У вези са формулом Блека и Шолса представљене су карактеристике које се зову *грчка слова*, њихово израчунавање и обезбеђивање од ризика помоћу њих.

Такође је укратко објашњена *вредност при ризику* (VaR) и изложен *капитални модел за одређивање приноса акција* (CAPM). Једно поглавље је посвећено Марковицевим резултатима који се односе на оптималан портфолио.

Свако поглавље је илустровано решеним примерима, а завршава се избором задатака. Решења већине задатака су дата на крају уџбеника. У последњем поглављу налазе се примери у програмском језику R који је због великих могућности и чињенице да се ради о слободном софтверу, постао један од водећих програма за статистичку обраду података. Подразумева се да читаоци имају основно предзнање о поменутом језику, тј. да су упознати са његовом синтаксом.

Сва литература за овај курс је на страним језицима (углавном енглеском). Да би се заинтересованима олакшало читање стране литературе, код сваког новог појма дат је и оригиналан енглески термин.

Најтоплије се захваљујемо нашим колегама др Весни Јевремовић и др Миљану Кнежевићу на пажљиво прочитаном рукопису, као и на корисним примедбама и сугестијама.

У Београду, фебруар 2017. године — Аутори

Садржај

1

Каматне стопе и токови новца

Почињемо са изучавањем *каматних стопа* (*interest rate*) и детерминистичких токова новца. За камату се често каже да представља вредност новца изражену у функцији времена (*the time value of money*).

Главница (*principal*) и *камата* (*interest rate*) су општепознати појмови: ако се уложи, или инвестира 1 динар у банку која даје камату од 8% годишње, онда ће на крају године на рачуну бити главница од 1 динар плус камата од 0.08 динара, укупно 1.08 динара. Ако би се уложило А динара, на крају године рачун би порастао на $A \cdot 1.08$ динара. У општем случају ако је камата, или каматна стопа r, која се изражава у децималама, онда ће почетни улог после годину дана бити помножен са фактором $(1+r)$ и бити једнак $A \cdot (1+r)$.

Постоје различити начини обрачунавања камате:

1) Када је у питања *проста* (*simple*) *камата*, новац уложен на одређен период (различит од једне године) ће се увећати за камату која је пропорционална времену трајања инвестирања, односно укупна сума на рачуну расте линеарно са временом. Ако је главница A, онда после две године на рачуну ће бити

$$V = A(1+2r)$$

динара, после n година на рачуну ће бити

$$V = A(1 + nr)$$

динара и уопште после било ког интервала времена дужине t (који се мери у годинама), укупна вредност на рачуну ће бити

$$V = A(1 + tr)$$

динара.

2) Међутим, већина банкарских улога и кредита (позајмица) подлеже *сложеној камати*, или *сложеном камаћењу* (*compound interest, compounding*). Размотримо рачун за који се добија камата по годишњој каматној стопи r. Ако се камата обрачунава годишње, онда после једне године камата која се добије додаје се главници, чиме се добије увећана главница, на основу које се добија камата за другу годину. Значи да ће током друге године тај рачун да заради камату на камату (интерес на интерес).

После годину дана новац на рачуну се множи фактором $(1 + r)$. После две године множи се опет фактором $(1 + r)$, што даје $(1+r)^2$ пута главница,..., после n година рачун порасте за фактор $(1 + r)^n$, којим се множи главница. Многе банке дају камату или наплаћују камату чешће: дневно, месечно, тромесечно .... Овакво чешће обрачунавање камате подиже ефективну годишњу каматну стопу. Традиција је да се наводе годишње каматне стопе, а онда се обрачунавају пропорционално.

Пример 1.1. *Размотримо тромесечно обрачунавање камате по каматној стопи једнакој r годишње. То значи да се за свако тромесечје наплаћује камата по каматној стопи једнакој $\frac{r}{4}$. Дакле, новац који стоји у банци 3 месеца порашће за фактор $1+\frac{r}{4}$ на крају 3 месеца. Ако остане у банци још 3 месеца, порашће још за фактор $1 + \frac{r}{4}$. После годину дана, главница ће порасти за фактор $(1 + \frac{r}{4})^4$. Јасно је, на основу Њутнове биномне формуле, да је за свако $r > 0$,*

$$\left(1 + \frac{r}{4}\right)^4 > 1 + r.$$

Заиста,

$$\left(1 + \frac{r}{4}\right)^4 = \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} \left(\frac{r}{4}\right)^k \cdot 1^{4-k} = 1 + r + ... > 1 + r.$$

Значи, за исту годишњу каматну стопу r, сума на рачуну при сложеном тромесечном обрачунавању камате већа је од суме која се добије у случају када је у питању проста каматна стопа.

Пример 1.2. *Ако се позајми 1000 евра на годину дана са каматном стопом од 8% годишње, обрачунатом тромесечно, колики је дуг на крају године?*

Камата од 8% годишње обрачуната тромесечно, значи сложену камату од $2\% = \frac{8}{4}\%$ *за тромесечје.*

После првог тромесечја, дуг је $1000(1 + 0.02)$;
после другог тромесечја дуг је $1000(1 + 0.02)^2$;
после трећег тромесечја дуг је $1000(1 + 0.02)^3$;
после четвртог тромесечја дуг је $1000(1 + 0.02)^4 = 1082.40$ *евра.*

Видимо у овом примеру да је дуг на крају године већи него позајмица +8%, дуг је једнак износу позајмице +8.24%.

Дефиниција 1.0.1. *Ефективна каматна стопа (effective interest rate) је она проста каматна стопа која би произвела исти резултат као и сложена каматна стопа на годину дана. Полазна, основна каматна стопа, назива се номинална каматна стопа (nominal interest rate).*

У примеру 1.2, ефективна каматна стопа је 8.24%, а номинална је 8%. Дакле, ако је у питању сложено камаћење, онда је износ који се добије за камату већи него када је у питању просто камаћење. То се дешава зато што се плаћа камата на већ обрачунату камату из претходних периода.

Веза између номиналне каматне стопе r и ефективне каматне стопе r_{ef} је следећа:

$$r_{ef} = \frac{\text{сума добијена на крају године} - G}{G}.$$

Ако је у питању годишња каматна стопа r, која се обрачунава тромесечно, онда је

$$r_{ef} = \frac{G(1 + \frac{r}{4})^4 - G}{G} = \left(1 + \frac{r}{4}\right)^4 - 1.$$

За претходни пример добијамо $r_{ef} = \frac{1082.40-1000}{1000} = 0.0824$.

Сложено обрачунавање камате може да буде са произвољном поделом. У општем случају година се дели на m једнаких периода. Месечне поделе нису баш једнаке, али месечно обрачунавање камате значи да је $m = 12$. За сваки појединачни период камата је једнака $\frac{r}{m}$, где је r номинална годишња каматна стопа, а m је број периода. После k периода раст је једнак фактору $(1+\frac{r}{m})^k$, а после целе године је једнак $(1+\frac{r}{m})^m$. Ефективна каматна стопа је r_{ef}, која задовољава

$$1 + r_{ef} = \left(1 + \frac{r}{m}\right)^m.$$

Шта се дешава када годину делимо на све мање периоде? То значи да број периода m постаје све већи и већи. Такво камаћење се зове *сложено непрекидно камаћење* (*continuous compounding*). У том случају ефективна каматна стопа r_{ef} се добија из релације

$$1 + r_{ef} = \lim_{m\to\infty}\left(1 + \frac{r}{m}\right)^m = e^r,$$

где је $e = 2.7818...$ основа природног логаритма, односно $r_{ef} = e^r - 1$.

Пример 1.3. *Ако банка даје каматну стопу од* 8% *годишње, онда када се камата обрачунава сложено и непрекидно, имамо да је* $1 + r_{ef} = e^r = e^{0.08} = 1.0833$, *па је ефективна каматна стопа* $r_{ef} = e^r - 1 = 0.0833$, *односно у процентима* $r_{ef} = 8.33\%$.

Доле се види како расте ефективна каматна стопа са растом номиналне каматне стопе при непрекидном и сложеном обрачунавању камате.

номинална каматна стопа r :

1.00 5.00 10.00 20.00 30.00 50.00 75.00 100.00

ефективна каматна стопа r_{ef}:

1.01 5.13 10.52 22.14 34.99 64.87 115.70 171.83

Могу се наћи ефективне каматне стопе за интервал произвољне дужине t, односно може се израчунати колико ће сума на рачуну (или дуг) порасти после произвољно дугачког периода времена. Означимо то време са t -мерено у годинама ($t = 1$ значи 1 година, $t = 0.25$ значи 3 месеца). Поделимо годину на m периода, сваки дужине $\frac{1}{m}$. Нека је $t \approx \frac{k}{m}$ за неко k, што значи да је t приближно једнако са k периода дужине m. Када је m врло велико може да се постигне добра тачност. Дакле $k \approx mt$. Из опште формуле за сложено обрачунату камату имамо да је

$$1+r_{ef} = \left(1+\frac{r}{m}\right)^k = \left(1+\frac{r}{m}\right)^{mt} = \left[\left(1+\frac{r}{m}\right)^m\right]^t \to e^{rt}, \text{ кад } m \to \infty$$

Одатле добијамо да је ефективна каматна стопа за интервал времена дужине t једнака $e^{rt} - 1$.

Пример 1.4. *Правило дуплирања (или правило 7-10.) Ако се новац уложи у банку са сложеном каматном стопом r, обрачунатом годишње, колико година треба да би се дуплирао улог?*

Почетни улог (deposit) D ће после n година бити једнак $D(1+r)^n$ и ми треба да нађемо ону вредност n за коју важи

$$D(1+r)^n = 2D,$$

односно оно n које задовољава $(1+r)^n = 2$. За довољно велико n важи

$$(1+r)^n = \left(1+\frac{rn}{n}\right)^n \approx e^{rn}.$$

Одатле, ако претпоставимо да је $e^{rn} \approx 2$ добијамо да је $n \approx \frac{\ln 2}{r} = \frac{0.693}{r} \approx \frac{0.7}{r}$. Дакле, да би се дуплирао улог, треба приближно $n \approx \frac{0.7}{r}$ година. За различите каматне стопе r, наводимо одговарајући број година тако да важи $(1+r)^n \approx 2$:

$$\begin{aligned} 1.01^{70} &= 2.07 \\ 1.02^{35} &= 2.00 \\ 1.03^{23.3} &= 1.99 \\ 1.05^{14} &= 1.98 \\ 1.07^{10} &= 1.96 \\ 1.10^{7} &= 1.95. \end{aligned}$$

Из последња два случаја видимо да ако је $r = 7\%$ ($r = 0.07$) потребно је 10 година да се дуплира уложени новац, а ако је $r = 10\%$, потребно је 7 година да се дуплира уложени новац.

1.1 Садашња вредност

Каматни рачун, који смо до сада разматрали, даје правило по коме се новац који улажемо у банку, или дуг за кредит који смо позајмили од банке, увећава у будућности. Ту је главно питање било како одредити *будућу вредност* (*future value*) за неку суму новца данас. Сада нас интересује обрнути проблем: да нађемо која је вредност данас, новца који ћемо добити у неком тренутку у будућности.

Размотримо следећу ситуацију:
1) За годину дана добијамо 110 евра;
2) добијамо 100 евра сада, које улажемо у банку са каматом од 10%.

У оба случаја кроз годину дана имаћемо 110 евра. Може се рећи да је добијање 110 евра кроз годину дана еквивалентно добијању 100 евра сада, при каматној стопи од 10%. Каже се да износ од 110 евра кроз годину дана има *садашњу вредност* (*present value*) од 100 евра, при каматној стопи од 10%.

Дефиниција 1.1.1. *Садашња вредност износа A кроз годину дана је износ данас једнак $\frac{A}{1+r}$, где је r важећа каматна стопа.*

Исти принцип односи се и на плаћање дугова.

Пример 1.5. *Ако кроз годину дана неком треба да платимо дуг од 100 евра, колико треба имати новца сада да се покрије та обавеза, односно колика ја садашња вредност те суме?*

Ако је каматна стопа r, данас нам треба свота од $\frac{100}{1+r}$ евра, јер ако се тај износ стави у банку сада, он ће нарасти за годину дана до 100 евра.

Садашња вредност будуће суме је мања од те будуће суме и кажемо да се та будућа сума умањује, *дисконтује* (*discounting*) да би се добила садашња вредност. Тај фактор за који се будућа сума дисконтује зове се *дисконтни фактор*, или *дисконтна стопа* (*discount factor*).

Дисконтни фактор за једну годину износи $d_1 = \frac{1}{1+r}$, где је r годишња каматна стопа. Значи, ако ће се сума A добити кроз годину дана, њена садашња вредност је сума $d_1 \cdot A = \frac{A}{1+r}$.

Ако банка практикује сложено камаћење, онда се оно примењује и за налажење садашње вредности. За сложену каматну стопу r, која је подељена на m једнаких периода током године, сума A после $k-$тог периода има дисконтни фактор

$$d_k = \frac{1}{\left(1 + \frac{r}{m}\right)^k},$$

односно A има садашњу вредност

$$\frac{A}{\left(1 + \frac{r}{m}\right)^k}.$$

Сва досадашња разматрања су се односила на један улог или позајмицу, односно на *појединачни ток новца* (*single cash flow*). Ова анализа може да се прошири. Нека је $(x_0, x_1, ..., x_n)$ вектор дужине $n+1$ чије координате представљају записе износа готовог новца у тренуцима $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$. Тај вектор називамо *ток новца* (*cash flow*). Сва разматрања односе се на идеалну банку, код које је иста камата на улоге и на позајмице, и која не наплаћује услуге, или трансакције.

1.2 Будућа вредност тока новца

Претпоставимо да је фиксирана дужина периода за обрачун камате и да је тај период једнак размаку између два узастопна члана у току новца. Посматрајмо ток $(x_0, x_1, ..., x_n)$, где x_i-ови могу бити и позитивни и нула и негативни (што одговара улагању на рачун, мировању рачуна, или исплатама са рачуна). Претпоставља се да све стављамо у банку. Чему је једнака вредност тока на крају $n-$тог периода?

На крају n-тог периода почетни улог x_0 ће порасти на $x_0(1+r)^n$;
x_1 после $n-1$ периода порашће на $x_1(1+r)^{n-1}$;
x_2 после $n-2$ периода порашће на $x_2(1+r)^{n-2}$;
......
x_n ће остати непромењен.

Дефиниција 1.2.1. *За ток новца* $(x_0, x_1, ..., x_n)$, *при каматној стопи* r *за сваки од* n *периода, укупна, односно будућа вредност (future value) тока после* n *периода је:*

$$FV = x_0(1+r)^n + x_1(1+r)^{n-1} + ... + x_n = \sum_{k=0}^{n} x_k(1+r)^{n-k}.$$

Пример 1.6. *За ток новца* $(-2, 1, 1, 1)$, *код кога је период 1 година и каматна стопа* $r = 10\%$ *годишње, будућа вредност је једнака:*

$$FV = -2 \cdot 1.1^3 + 1 \cdot 1.1^2 + 1 \cdot 1.1 + 1 = 0.648.$$

Формула за будућу вредност користи сложене каматне стопе за сваки период.

1.3 Садашња вредност тока новца

Садашња вредност тока новца, исто као и будућа вредност, може да се израчуна тако што се сваки износ у току разматра посебно. Нека је дат ток $(x_0, x_1, ..., x_n)$; чему је једнака садашња вредност овог тока?

Садашња вредност износа x_0 је једнака x_0. Садашња вредност износа x_1 је једнака $\frac{x_1}{1+r}$, јер та вредност треба да се дисконтује само за један период. Настављајући поступак добијамо да је садашња вредност износа x_n једнака $\frac{x_n}{(1+r)^n}$.

Дефиниција 1.3.1. *За ток новца* $(x_0, x_1, ..., x_n)$, *при каматној стопи* r *за сваки од* n *периода, садашња вредност (present value) тока је:*

$$PV = x_0 + \frac{x_1}{(1+r)} + ... + \frac{x_n}{(1+r)^n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x_k}{(1+r)^k}.$$

Пример 1.7. *За ток новца* $(-2, 1, 1, 1)$, *код кога је период 1 година и каматна стопа* $r = 10\%$ *годишње садашња вредност је једнака:*

$$PV = -2 + \frac{1}{1.1} + \frac{1}{1.1^2} + \frac{1}{1.1^3} = 0.487.$$

На садашњу вредност тока новца може да се гледа као на садашњи износ који је еквивалентан целом току, односно као да смо цео ток заменили само једним износом у садашњем тренутку. Аналогно томе, будућа вредност тока једнака је износу у будућности који је еквивалентан целом току (односно цео ток је претворен у један износ на крају периода n).

Садашња и будућа вредност тока су повезане на следећи начин:

$$\begin{aligned} PV &= \sum_{k=0}^{n} \frac{x_k}{(1+r)^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x_k(1+r)^n}{(1+r)^k(1+r)^n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x_k(1+r)^{n-k}}{(1+r)^n} \\ &= \frac{FV}{(1+r)^n}. \end{aligned}$$

За ток $(-2, 1, 1, 1)$, из претходна два примера имамо

$$PV = 0.487 = \frac{FV}{1.1^3} = \frac{0.648}{1.331}.$$

1.4 Сложено и непрекидно камаћење токова новца

Имамо ток $(x_0, x_1, ..., x_n)$. Нека је r годишња каматна стопа, а рачуна се сложена камата за годину која је подељена на m једнаких периода (што значи да је каматна стопа за један период једнака $\frac{r}{m}$). Почетак тока је у нултом тренутку, а на крају сваког од n периода се обрачунава камата. У складу са претходним разматрањима, будућа и садашња вредност тока биће:

$$FV = \sum_{k=0}^{n} x_k \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{n-k},$$

$$PV = \sum_{k=0}^{n} \frac{x_k}{(1+\frac{r}{m})^k}.$$

Ако се номинална каматна стопа обрачунава непрекидно и ако се промене дешавају у тренуцима $t_0, t_1, ..., t_n$ са одговарајућим вредностима $x(t_k)$, $k = 0, 1, 2, ..., n$, то јест ако је у питању ток

$(x(t_0), x(t_1), ..., x(t_n))$, онда су формуле за будућу и садашњу вредност новчаног тока при непрекидно обрачунатој камати следеће:

$$FV = \sum_{k=0}^{n} x_{t_k} e^{r(t_n - t_k)},$$
$$PV = \sum_{k=0}^{n} x_{t_k} e^{-rt_k}.$$

Теорема 1.4.1 (О трансформацији тока новца). *Нека су* $\mathbf{a} = (a_0, a_1, ..., a_n)$ *и* $\mathbf{b} = (b_0, b_1, ..., b_n)$ *два тока новца таква да при каматној стопи* r *важи:*

$$PV(\mathbf{a}) = \sum_{i=0}^{n} a_i(1+r)^{-i} \geq \sum_{i=0}^{n} b_i(1+r)^{-i} = PV(\mathbf{b})$$

Тада се ток $\mathbf{a}$ *може трансформисати у ток* $\mathbf{c} = (c_0, c_1, ..., c_n)$, *који има исту садашњу вредност као и ток* $\mathbf{a}$ *и за који важи* $c_i \geq b_i$, *за свако* $i = 0, 1, ..., n$.

Доказ. Индукцијом по броју чланова у току добијамо: ако је број чланова једнак 1, то јест када је $n = 0$, имамо

$$PV(\mathbf{a}) = a_0 \geq b_0 = PV(\mathbf{b})$$

Претпоставимо да тврђење важи за новчане токове дужине n. Доказаћемо да у том случају тврђење важи и за новчане токове дужине $n+1$, такве да је садашња вредност од $\mathbf{a}$ већа или једнака од садашње вредности од $\mathbf{b}$.

Постоје два случаја:

1) $a_0 \geq b_0$. У овом случају мењамо први елемент тока $\boldsymbol{a}$ тако што као први његов елемент стављамо b_0, а преосталих $a_0 - b_0$ улажемо у банку на један период при каматној стопи r. После првог периода тај износ, увећан за камату, додајемо току. На тај начин смо ток $\boldsymbol{a}$ трансформисали у ток

$$\mathbf{a}^\star = (b_0, (1+r)(a_0 - b_0) + a_1, ..., a_n).$$

Пошто су први чланови у оба тока **a** и **b** исти, посматрамо остатак, односно разлику садашњих вредности остатака у тренутку $t = 1$ после првог периода

$$
\begin{aligned}
&(1+r)(a_0 - b_0) + \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1}(1+r)^{-i} - \sum_{i=0}^{n-1} b_{i+1}(1+r)^{-i} = a_0(1+r) \\
&+ (1+r)\sum_{i=1}^{n} a_i(1+r)^{-i} - b_0(1+r) - (1+r)\sum_{i=1}^{n} b_i(1+r)^{-i} \\
&= (1+r)(PV(\mathbf{a}) - PV(\mathbf{b})) \geq 0.
\end{aligned}
$$

Садашња вредност после првог периода трансформисаног тока новца

$$((1+r)(a_0 - b_0) + a_1, ..., a_n)$$

је већа или једнака од садашње вредности за ток $(b_1, ..., b_n)$. Према индуктивној претпоставци следи да можемо да трансформишемо ток новца

$$(b_0, (1+r)(a_0 - b_0) + a_1, ..., a_n)$$

у ток

$$(b_0, c_1, ..., c_n),$$

тако да важи да је $c_i \geq b_i$, за свако $i = 1, ..., n$.

2) $a_0 < b_0$. У овом случају позајмљујемо разлику $b_0 - a_0$, коју ћемо после првог периода да вратимо са каматом. Имамо трансформисани низ

$$
\begin{aligned}
\mathbf{a}^{**} &= (b_0, a_1 - (1+r)(b_0 - a_0), a_2, ..., a_n) \\
&= (b_0, a_1 + (1+r)(a_0 - b_0), a_2, ..., a_n) = \mathbf{a}^*,
\end{aligned}
$$

па се даље резоновање наставља као у претходном случају. □

У претходној теореми видели смо да, помоћу идеалне банке, која даје исте камате на улоге и на позајмице и која не наплаћује трошкове трансакција, један ток можемо трансформисати у други. Тако, на пример, при $r = 10\%$, можемо да трансформишемо ток $(1, 0, 0)$ у ток $(0, 0, 1.21)$, тако што ћемо да уложимо у банку један евро сада и да добијемо $1.21 = 1 \cdot 1.1^2$ кроз две године.