„Cilj ove knjige je da na objedinjen i uniforman način prezentuje izbor geometrijskih znanja potrebnih informatičarima. Knjiga može da služi ne samo kao udžbenik za predmet *Geometrija*, već i za druge slične predmete, pa i kao zanimljivo štivo svima koji vole i geometriju i računarstvo. *Geometrija za informatičare* je značajna i zbog toga što je jedna od retkih knjiga iz ove oblasti na srpskom jeziku."

prof. dr Predrag Janičić

„Autori su našli pravi balans i meru između formalnog uvođenja pojmova, mnogobrojnih primera i uporednih objašnjenja datih na intuitivnom nivou. Zato će ovaj materijal biti vrlo koristan i interesantan, ne samo studentima predmeta *Geometrija*, već i široj populaciji koja se bavi računarstvom i informatikom."

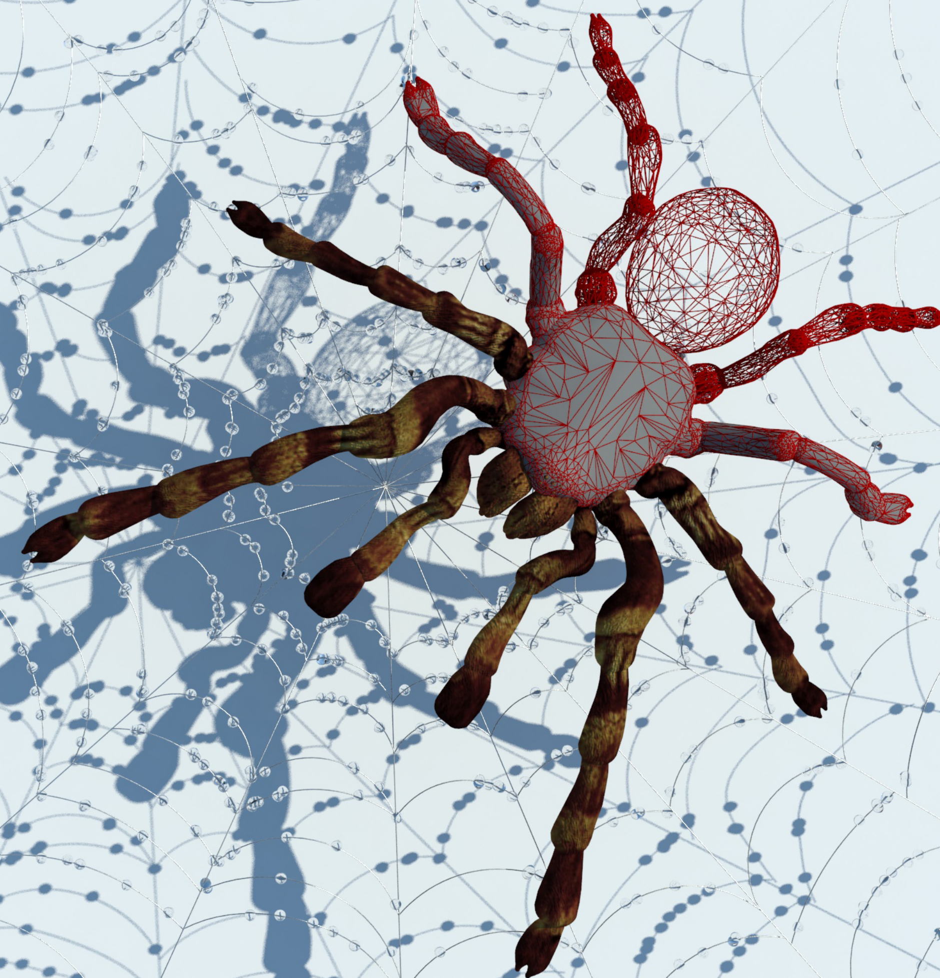
dr Miroslava Antić

ISBN 978-86-7589-106-2

9 788675 891062

Tijana Šukilović, Srđan Vukmirović

Geometrija za informatičare



Matematički fakultet
Beograd, 2015. godine

Tijana Šukilović, Srđan Vukmirović

Geometrija za informatičare

Matematički fakultet
Beograd, 2015. godine

Predgovor

Ova knjiga je udžbenik za kurs *Geometrija,* na drugoj godini smera Informatika, Matematičkog fakulteta, Univerziteta u Beogradu. Autori su predavači na tom kursu od 2006. godine.

Tokom svih ovih godina kurs se menjao i evoluirao, tako da je njegov sadašnji sadržaj predstavljen sa prvih osam poglavlja knjige. U poglavljima *Izometrije* i *Krive i površi* ima zahtevnijeg sadržaja koji prevazilazi okvire kursa Geometrija.

Deo knjige koji smo nazvali *Dodatak*, sadrži određen broj izbornih tema. Neke od tih tema, a i mnoge druge, bile su teme studentskih seminarskih radova i programerskih projekata. Te napredne teme su pogodne i za srednje napredan kurs primenjene geometrije na nivou master ili doktorskih studija.

Knjigu mogu koristiti svi oni kojima su potrebna znanja iz praktične geometrije, ukoliko imaju neka osnovna matematička predznanja (na primer na nivou gimnazijske matematike). Dakle, pretpostavljamo da čitalac ima osnovna znanja iz elementarne geometrije, trigonometrijskih funkcija, linearne algebre i diferencijalnog računa, a ako ih nema, upućujemo ga na odgovarajuću literaturu.

Cilj nam je bio da geometriju predstavimo na način koji je pogodan za implementaciju na računaru, sa manje formalizma, a više primera. Kad god je to bilo pogodno, pokušali smo da vidimo geometriju kroz primere iz svakodnevnog života. Neke od tema su izvan granica geometrije i zalaze u topologiju, analizu, mehaniku ili statiku. Hteli smo da čitalac razume da su matematičke discipline i njihove primene međusobno povezane. Često je za pravljenje neke matematičke simulacije neophodno i dobro poznavanje fizike.

U prvoj glavi uvodimo vektore u euklidskoj ravni i prostoru geometrijski – kao klase ekvivalencije usmerenih duži koje imaju isti pravac, smer i intenzitet. Definišemo koordinate tačaka i vektora, kao i transformacije koordinatnih sistema. Veoma mnogo pažnje je posvećeno skalarnom, vektorskom i mešovitom proizvodu i njihovim primenama: Određivanje orijentacije i površine trougla, da li tačka pripada trouglu, zapreminama tela... Orijentacija u ravni i prostoru je uvedena intuitivno, ali pažljivo, i što će čitalac verovatno zapaziti – vrlo relativno.

Druga glava predstavlja kratak pregled analitičke geometrije ravni: Pravih, polupravih, duži, krugova i konusnih preseka, tj. krivih drugog reda. Istaknuto je parametarsko zadavanje objekata, jer je ono u primenama korisnije od implicitnog. Detaljno se razmatraju osobine konusnih preseka: Elipse, hiperbole i parabole, koje su važne u geometriji i primenama. Ipak, u cilju smanjenja obima kursa, to poglavlje, kao i poglavlje koje se odnosi na krive drugog reda, može da se izostavi.

Treća glava sadrži neke osnovne elemente računarske geometrije i bavi se proučavanjem poligona. Definišemo unutrašnjost i triangulaciju prostog poligona i dajemo konkretne načine za njihovo određivanje. Takođe, izvodimo formulu za površinu prostog poligona, što je u literaturi veoma teško naći u korektnom obliku. Opisujemo i algoritme za konveksni omotač i Delonijevu triangulaciju skupa tačaka ravni.

Četvrta glava je posvećena analitičkom zadavanju pravih, duži, ravni u trodimenzionom euklidskom prostoru i njihovim međusobnim odnosima. Iako je geometrijski važno, poglavlje o mimoilaznim pravama nije toliko značajno u računarstvu, pa ga čitalac ne mora detaljno proučavati.

U petoj glavi formalno uvodimo afina preslikavanja u proizvoljnoj dimenziji. Koga taj formalizam ne interesuje, može odmah da pređe na preslikavanja u ravni. Predstavljanje afinih preslikavanja matricama je lako, ali nije očigledno. Pošto ima veliku primenu u računarstvu, treba mu posvetiti mnogo pažnje, kao i konkretnim primerima afinih preslikavanja ravni.

Izometrijama smo posvetili šestu glavu. Poglavlje o izometrijama ravni je jednostavno i preporučujemo ga za prvo čitanje. Ostatak ove glave je za naprednije studente ili kao referenca onima koji se bave računarskom grafikom. Radi matematičke potpunosti, dokazujemo da je svaka izometrija euklidskog prostora afino preslikavanje i karakterišemo afine izometrije. Izometrijama prostora, rotacijama i Ojlerovim uglovima smo posvetili posebnu pažnju jer je kompletne literature na ovu temu malo, a primene u robotici i računarskoj grafici su brojne. Kao dodatna tema, može se koristiti poglavlje *Kvaternioni i izometrije prostora* iz *Dodatka*.

Sedma glava je posvećena poliedarskim površima koje predstavljaju važan način predstavljanja prostornih objekata u raznim oblastima primena. Ne ulazeći u tehničke detalje, skoncentrisali smo se na neke jednostavne geometrijske i topološke pojmove: Povezanost, rub, orijentabilnost. Pri tome, mnoge činjenice za koje su potrebni objekti i metode topologije nisu strogo definisane, niti dokazane.

Osma glava odnosi se na najosnovnije pojmove u vezi parametrizovanih krivih i površi. Delovi ovog poglavlja, kao što su primeri, mogu da se zanemare u prvom čitanju. Krivima dajemo fizičko tumačenje kad god je moguće (ravnomerno ubrzano i kružno kretanje, lančanica, cikloida...). Poglavlje koje se odnosi na Bezijerove krive sadrži neke važne algoritme čiji su dokazi tehnički, te se mogu zaobići. Poglavlje koje se bavi uopštenjima Bezijerovih krivih je preglednog karaktera, sadrži interesantne primere i namenjeno je naprednijim studentima.

U poglavlju *Dodatak* obrađene su razne teme koje su detaljnije objašnjene u uvodu tog poglavlja. Na primer, u računarskim igricama i simulacijama prirodnih procesa, objekti se bacaju, padaju, prevrću, klize... Da bismo razumeli geometriju njihovog kretanja, bavili smo se kosim hicem, težištem tela, strmom ravni. Poglavlje o homogenim koordinatama i osnovama projektivne geometrije smo dodali jer su te teme važne za razumevanje nekih elemenata računarske geometrije i obrade slika.

Oznake u tekstu su standardne. Trudili smo se da razlikujemo tačke euklidskog prostora $\mathbb{E}^n$, vektore pridruženog vektorskog prostora $\mathbb{V}^n$ i vektore koordinata $\mathbb{R}^n$; preslikavanje od matrice preslikavanja, itd. Nažalost, ako želimo da tekst ostane čitljiv, teško je biti dosledan, pa bar jedan od ta dva cilja verovatno nismo postigli. Oznaku $\square$ koristimo za kraj dokaza, $\diamond$ za kraj primera, a E za jediničnu matricu.

Knjiga je složena u LaTeX-u, a slike crtane u *WinGCLC*-u i *JavaView*-u. Zahvaljujemo se Tašani Šukilović na pomoći pri izradi određenog broja slika, kao i za dizajn korica. Pažljivom čitaocu ćemo biti zahvalni na svakoj uočenoj grešci koju ćemo rado ispraviti u sledećem izdanju.

Na kraju, koristimo priliku da se zahvalimo recenzentima, prof. dr Predragu Janičiću i dr Miroslavi Antić, kao i kolegi mr Đuri Mišljenoviću na pažljivom čitanju rukopisa i brojnim primedbama, sugestijama i diskusijama koje su ovu knjigu učinile boljom.

Beograd, decembar 2015. godine Autori

Sadržaj

B Homogene koordinate

U ovom poglavlju dajemo uvod u kraljicu geometrija – projektivnu geometriju. Njen specijalni slučaj je afina geometrija, o kojoj je bilo reči u prethodnim poglavljima.

Projektivnu ravan dobijamo tako što afinoj (tj. (x, y)) ravni dodamo tzv. beskonačno daleku pravu na kojoj se seku paralelne prave afine ravni. Tako uvedena projektivna ravan postaje prirodan ambijent za krive drugog reda, perspektivne crteže i druge objekte.

Algebarski zapis projektivne ravni čine homogene koordinate koje moramo uvesti kako bismo mogli da računamo sa tačkama beskonačno daleke prave. Svakoj tački ravni odgovaraju tri homogene koordinate, određene do na **homogenost**. Zato su prirodna preslikavanja u projektivnoj ravni indukovana linearnim preslikavanjima tih triju koordinata – zovemo ih projektivna preslikavanja. Afina preslikavanja su specijalan slučaj projektivnih. Tačnije, afina preslikavanja su ona projektivna preslikavanja koja čuvaju paralelnost, tj. čuvaju beskonačno daleku pravu. Predstavljanje afinih preslikavanja ravni 3×3 matricama (videti Poglavlje 5.2) je upravo homogeni zapis tih preslikavanja.

Projektivna geometrija ima mnogobrojne primene. Baricentričke koordinate (videti Dodatak C) su takođe homogene koordinate. Osim toga, prelaskom na homogene koordinate od Bezijerovih krivih dobijamo racionalne Bezijerove krive. Projektivnim transformacijama možemo da eliminišemo projektivne distorzije na slikama (videti Primer B.5)

Homogene koordinate se mogu uvesti i u prostoru, tako da se tački prostora pridruže četiri homogene koordinate. One su praktično korištene u Dodatku G koji se odnosi na kvaternione. Osim toga, veoma su korisne u računarskoj grafici, jer se 4×4 matricama predstavljaju afine transformacije i projektovanja prostora na ravan.

B.1 Homogene koordinate u ravni

Tački M afine ravni sa koordinatama (x, y) pridružujemo homogene koordinate $(x_1 : x_2 : x_3)$, $x_3 \neq 0$. Pokazaćemo da se tada paralelne prave afine ravni seku u beskonačno dalekoj tački. Uvođenjem homogenih koordinata dodajemo afinoj ravni tzv. beskonačno daleku pravu, čija je jednačina $x_3 = 0$ i koja se sastoji od beskonačno dalekih tačaka.

Svi objekti afine ravni (tačke, prave, krive ...) dobijaju odgovarajuće jednačine u homogenim koordinatama, a samim tim eventualno i poneku beskonačno daleku tačku koju ranije nisu imali.

Definicija B.1. ***Homogene koordinate*** *tačke* $M(x, y)$ *afine ravni* $\mathbb{R}^2$ *su bilo koja uređena trojka* $(x_1 : x_2 : x_3)$ *takva da važi:*

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3}, \quad x_3 \neq 0. \tag{B.1}$$

Primetimo da homogene koordinate nisu jedinstvene: Za proizvoljno $\lambda \neq 0$, $(x_1 : x_2 : x_3)$ i $(\lambda x_1 : \lambda x_2 : \lambda x_3)$ predstavljaju istu tačku, odnosno određene su do na **homogenost**. Vektor koordinata $\overrightarrow{M} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ je **vektor predstavnik** tačke M.

Primer B.1. Tačka M čije su afine koodinate $M(3, -4)$ ima homogene koordinate $M(3 : -4 : 1) = M(-6 : 8 : -2) = M(30 : -40 : 10) \dots$ jer je

$$3 = \frac{3}{1} = \frac{-6}{-2} = \frac{30}{10} \dots, \quad -4 = \frac{-4}{1} = \frac{8}{-2} = \frac{-40}{10} \dots$$

Stoga, vektor predstavnik te tačke je bilo koji od kolinearnih vektora $(3, -4, 1)$, $(-6, 8, -2)$, $(30, -40, 10) \dots$ prostora $\mathbb{R}^3$.

Obratno, tačka čije su homogene koordinate $N(1 : 2 : 3)$ ima jedinstvene afine koordinate $N(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. ◇

Tački $P(5 : 2 : 0)$ ne možemo da odredimo afine koordinate, jer joj je treća koordinata jednaka nuli. O takvim tačkama govorimo o nastavku.

Definicija B.2. *Tačka oblika* $(x_1 : x_2 : 0)$, $x_1^2 + x_2^2 \neq 0$, *tj. tačka za koju važi* $x_3 = 0$, *naziva se* ***beskonačno daleka tačka***. *Sve beskonačno daleke tačke čine beskonačno daleku pravu* u_∞ *čija je jednačina* $x_3 = 0$. *Afinu ravan* $\mathbb{R}^2$ *kojoj smo dodali tačke beskonačno daleke prave* u_∞ *nazivamo* ***dopunjena afina ravan*** *i označavamo sa* $\bar{\mathbb{R}}^2$.

Afina prava:

$$q : ax + by + c = 0 \tag{B.2}$$

u homogenim koordinatama postaje $q : a\frac{x_1}{x_3} + b\frac{x_2}{x_3} + c = 0$, odakle dobijamo njenu jednačinu u homogenim koordinatama:

$$\bar{q} : ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0. \tag{B.3}$$

Primetimo da prava $\bar{q}$ ima jednu tačku više od prave q: To je beskonačno daleka tačka $Q_\infty(-b : a : 0)$ koja zadovoljava jednačinu (B.3), a nema (x, y) koordinate.

Primetimo da jednačina $\lambda ax_1 + \lambda bx_2 + \lambda cx_3 = 0$ predstavlja istu pravu. Zato pišemo $q[a : b : c]$, a brojeve $[a : b : c]$ zovemo homogene koordinate prave q. Vektor $\overrightarrow{q} = (a, b, c)$ je njen vektor predstavnik.

Primer B.2. Odrediti presek pravih $q : 2x - 5y + 6 = 0$, $r : 2x - 5y + 7 = 0$ u:

(a) afinoj ravni; (b) dopunjenoj afinoj ravni.

Rešenje: (a) U afinoj ravni prave q i r se ne seku, tj. paralelne su.

(b) Jednačina pravih q i r u dopunjenoj afinoj ravni su:

$$\bar{q} : 2x_1 - 5x_2 + 6x_3 = 0, \quad \bar{r} : 2x_1 - 5x_2 + 7x_3 = 0.$$

Rešavanjem tog sistema dobijamo da je $x_3 = 0$, a $x_1 = \frac{5}{2}x_2$, pa je presek pravih $\bar{q}$ i $\bar{r}$ beskonačno daleka tačka:

$$\bar{q} \cap \bar{r} = \{(\frac{5}{2}x_2 : x_2 : 0)\} = \{(5 : 2 : 0)\}.$$

Poslednju jednakost smo dobili deljenjem homogenih koordinata brojem $x_2 \neq 0$ i množenjem sa 2. ◇

Kao i u prethodnom primeru, uočavamo da se svake dve paralelne prave $ax + by + c_1 = 0$ i $ax + by + c_2 = 0$ seku u beskonačno dalekoj tački $(-b : a : 0)$. Zato važi naredna teorema:

Teorema B.1. *Paralelene prave dopunjene afine ravni se seku u beskonačno dalekoj tački. Dakle, svake dve prave u dopunjenoj afinoj ravni se seku.*

Homogene koordinate smo mogli definisati ne koristeći pojam afine ravni.

Definicija B.3. ***Realna projektivna ravan*** *je skup homogenih koordinata:*

$$\mathbb{R}P^2 := \{\,(x_1 : x_2 : x_3)|\, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\},$$

pri čemu ne mogu sve tri koordinate istovremeno biti jednake nuli.

Na osnovu prethodnog je jasno da možemo identifikovati realnu projektivnu ravan $\mathbb{R}P^2$ sa proširenom afinom ravni:

$$\begin{aligned}\mathbb{R}P^2 &:= \{(x_1 : x_2 : x_3)\} = \{(x_1 : x_2 : x_3)\,|\, x_3 \neq 0\} \cup \{(x_1 : x_2 : 0)\}\\ &= \{(\frac{x_1}{x_3} : \frac{x_2}{x_3} : 1)\} \cup \{(x_1 : x_2 : 0)\} = \mathbb{R}^2 \cup u_\infty = \bar{\mathbb{R}}^2.\end{aligned}$$

Kako svakoj tački $M(x_1 : x_2 : x_3)$ odgovara čitava prava vektora predstavnika $\overrightarrow{M}(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, realnu projektivnu ravan možemo geometrijski videti kao skup pravih u $\mathbb{R}^3$ koje sadrže koordinatni početak $(0, 0, 0)$ (tzv. snop pravih).

Primer B.3. Odrediti jednačinu prave $\bar{q}$ kroz tačke $A(1 : 2 : 3)$, $B(-2 : 1 : 0)$.

Rešenje: Potražimo jednačinu prave $\bar{q}$ u obliku $\bar{q} : ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$. Iz uslova da tačke A i B pripadaju $\bar{q}$, dobijamo homogeni sistem jednačina:

$$1a + 2b + 3c = 0, \quad -2a + 1b + 0c = 0.$$

Ako nepoznati vektor koji predstavlja pravu $\bar{q}$ označimo sa $\overrightarrow{q} = (a, b, c)$, tada je taj sistem ekvivalentan činjenici da je vektor $\overrightarrow{q}$ normalan na vektore predstavnike tačaka $\overrightarrow{A}$ i $\overrightarrow{B}$. Stoga se on može zapisati kao njihov vektorski proizvod:

$$\overrightarrow{q} = \overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B} = (-3, -6, 5).$$

Jednačina tražene prave je:

$$\bar{q} : -3x_1 - 6x_2 + 5x_3 = 0. \qquad \diamond$$

Primedba B.1. *U prethodnom primeru smo videli da se homogene koordinate prave $q = AB$ dobijaju vektorskim proizvodom $\overrightarrow{q} = \overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}$.*

Čitaocu se ostavlja da proveri da se tačka Q koja je presek pravih a i b dobija na potpuno isti način, tj. njen vektor predstavnik je $\overrightarrow{Q} = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ vektorski proizvod vektora predstavnika pravih.

B.2 Projektivna i afina preslikavanja ravni

Definicija B.4. ***Projektivno preslikavanje*** *projektivne ravni je preslikavanje koje tačku $M(x_1 : x_2 : x_3)$ slika u tačku $M'(x_1' : x_2' : x_3')$, i dato je formulama:*

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \ \det(p_{ij}) \neq 0. \tag{B.4}$$

Preslikavanje (B.4) kraće zapisujemo u obliku:

$$\lambda x' = Px, \tag{B.5}$$

gde je $P = (p_{ij})$ matrica tog preslikavanja.

Broj $\lambda \neq 0$ u definiciji projektivnog preslikavanja sugeriše da su u pitanju homogene koordinate. Bez njega bi te formule predstavljale linearno preslikavanje prostora $\mathbb{R}^3$.

Primetimo sledeće:

- Matrice P i λP predstavljaju isto preslikavanje.
- Kompoziciji preslikavanja odgovara množenje matrica, a inverznom preslikavanju odgovara inverzna matrica.
- Projektivno preslikavanje slika čuva kolinearnost tačaka, tj. slika prave u prave.

Pokažimo sada da su afina preslikavanja proširene afine ravni specijalan slučaj projektivnih preslikavanja. Posmatrajmo formule (5.3) afinog preslikavanja koje tačku $M(x, y)$ slika u tačku $M(x', y')$.

Homogene koordinate tačke M date su relacijom (B.1), a homogene koordinate njene slike sličnom relacijom:

$$x' = \frac{x_1'}{x_3'}, \;\; y' = \frac{x_2'}{x_3'}, \tag{B.6}$$

Zamenom formula (B.1) i (B.6) u (5.3) dobijamo:

$$\frac{x_1'}{x_3'} = \frac{\lambda x_1'}{\lambda x_3'} = a_{11}\frac{x_1}{x_3} + a_{12}\frac{x_2}{x_3} + b_1,$$
$$\frac{x_2'}{x_3'} = \frac{\lambda x_2'}{\lambda x_3'} = a_{21}\frac{x_1}{x_3} + a_{22}\frac{x_2}{x_3} + b_2.$$

Uvedimo relaciju $\lambda x_3' = x_3$. Nakon množenja prethodne dve relacije sa x_3 i prelaska na matrični zapis, dobijamo da je afino preslikavanje (5.3) specijalni slučaj projektivnog preslikavanja:

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Primetimo da se ovim preslikavanjem beskonačno daleka prave $x_3 = 0$ slika u seebe samu. Ovo objašnjava zašto je opravdano koristiti 3×3 matrice za zapis afinih preslikavanja ravni (videti Poglavlje 5.2).

Za četiri tačke projektivne ravni kažemo da su u **opštem položaju** ako nikoje tri od tih tačaka nisu kolinearne.

Teorema B.2. (Osnovna teorema projektivne geometrije) *Postoji jedinstveno projektivno preslikavanje projektivne ravni $\mathbb{R}P^2$ koje četiri tačke A,B,C,D u opštem položaju slika redom u tačke A', B', C', D', u opštem položaju.*

Dokaz: Posmatramo **bazne tačke** A_0, B_0, C_0, D_0, gde je:

$$A_0(1 : 0 : 0), \;\; B_0(0 : 1 : 0), \;\; C_0(0 : 0 : 1), \;\; D_0(1 : 1 : 1).$$

Pokažimo da postoji jedinstveno projektivno preslikavanje:

$$f : A_0, B_0, C_0, D_0 \mapsto A, B, C, D.$$

Kako su tačke A, B, C nekolinearne, odgovarajući vektori koordinata su nezavisni, pa je vektor $\overrightarrow{D}$ moguće izraziti u obliku:

$$\overrightarrow{D} = \lambda_1 \overrightarrow{A} + \lambda_2 \overrightarrow{B} + \lambda_3 \overrightarrow{C},$$

gde ni jedan od brojeva $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ nije nula. Ako je, na primer, $\lambda_1 = 0$, tada bi tačke B, C i D bile kolinearne, što je suprotno pretpostavci.

Neka je P matrica čije su kolone redom $\lambda_1 \overrightarrow{A}$, $\lambda_2 \overrightarrow{B}$ i $\lambda_3 \overrightarrow{C}$. Preslikavanje f zadato sa $\lambda x' = Px$ je traženo preslikavanje. Zašto?

Matrica P je do na množenje skalarom jedinstvena (po definiciji matrice linearnog preslikavanja), pa je f jedinstveno.

Na sličan način se dobija preslikavanje g koje slika A_0, B_0, C_0, D_0 u A', B', C', D', pa je projektivno preslikavanje $g \circ f^{-1}$ jedinstveno preslikavanje iz tvrđenja teoreme. $\square$

Primedba B.2. *Projektivno preslikavanje ravni sa četiri fiksne tačke u opštem položaju je identitet.*

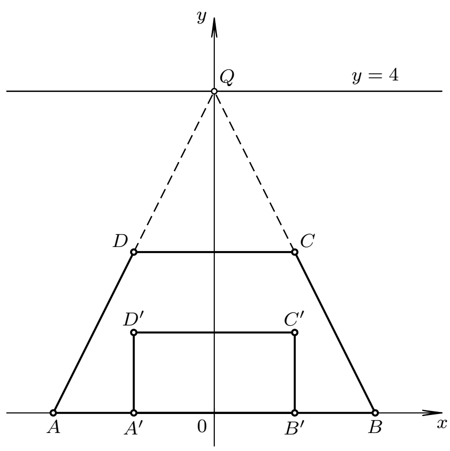
Primer B.4. Odrediti projektivno preslikavanje ravni koje tačke A_0, B_0, C_0, D_0 slika u $A(1:2:3)$, $B(3:2:1)$, $C(0:1:1)$, $D(7:11:10)$.

Rešenje: Primetimo da je:

$$\overrightarrow{D} = \overrightarrow{A} + 2\overrightarrow{B} + 5\overrightarrow{C},$$

pa je, u oznakama iz dokaza prethodne teoreme, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 5$. Matrica traženog preslikavanja je:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}. \qquad \diamond$$



Slika 113: Primer B.5

Primer B.5. Odrediti projektivno preslikavanje koje trapez $ABCD$, $A(-2,0)$, $B(2,0)$, $C(1,2)$, $D(-1,2)$ preslikava u pravougaonik $A'B'C'D'$, $A'(-1,0)$, $B'(1,0)$, $C'(1,1)$, $D'(-1,1)$.

Rešenje: Prvo je neophodno odrediti homogene koordinate svih tačaka. Kao u prethodnom primeru, dobijamo da preslikavanja f i g, koje preslikavaju četvorougao $A_0B_0C_0D_0$ u $ABCD$ i $A'B'C'D'$, redom, imaju matrice:

$$f : \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad g : \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matrica P traženog preslikavanja $g \circ f^{-1}$ dobija se (do na proporcionalnost) množenjem druge i inverza prve matrice

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}.$$

U primenama se za računanje preslikavanja može koristiti ova matrica, ali je interesantno videti i šta se dešava u afinim koordinatama. Naime, homogene jednačine tog preslikavanja su:

$$\lambda x_1' = 2x_1, \ \ \lambda x_2' = x_2, \ \ \lambda x_3' = -x_2 + 4x_3, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Prelaskom na afine koordinate, dobijamo:

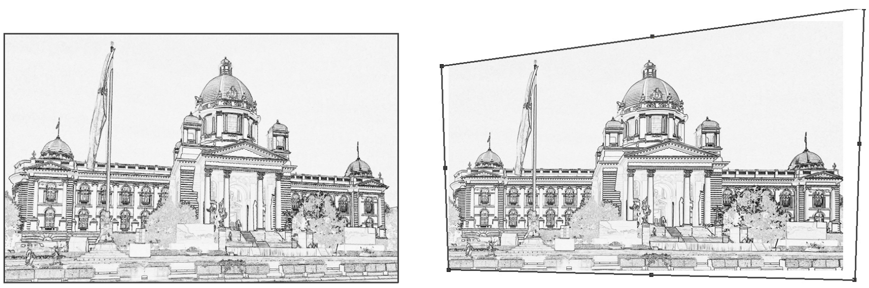
$$x' = \frac{x_1'}{x_3'} = \frac{2x_1}{-x_1 + 4x_3} = \frac{2\frac{x_1}{x_3}}{-\frac{x_1}{x_3} + 4} = \frac{2x}{-y+4}.$$

Na sličan način dobijamo i y' koordinatu, pa je traženo preslikavanje u afinim koordinatama:

$$x' = \frac{2x}{-y+4}, \quad y' = \frac{y}{-y+4}.$$

Primetimo da se prava $y = 4$ slika u beskonačno daleku pravu. To se slaže sa činjenicom da se tačka $AD \cap BC = \{Q\}$, $Q = (0,4)$, koja pripada pravoj $y = 4$, slika u beskonačno daleku tačku u kojoj se seku paralelne ivice pravougaonika (videti Sliku 113).

Iz prethodnih formula vidimo da traženo preslikavanje nije afino. Kad god je to slučaj postojaće konačna prava koja se slika beskonačno daleko, a na kojoj se u računima javlja deljenje nulom. ◇



Slika 114: Ispravljanje projektivne distorzije

Primedba B.3. *Jasno je da, slično kao u prethodnom primeru, možemo projektivnim preslikavanjem preslikati proizvoljan četvorougao na pravougaonik, a da se pri tom prave preslikaju u prave. Ovo se primenjuje za otklanjanje projektivne distorzije. Na primer, na projektorima postoji „keystone” opcija kojom se postiže da projektovana slika ima oblik pravougaonika (a ne trapeza), kada projektor ne stoji horizontalno.*

Slično se ispravlja projektivna distorzija koja je posledica perspektive na fotografijama (videti Sliku 114).

B.3 Homogene koordinate i projektivna preslikavanja u prostoru

Afinim koordinatama tačke $M(x, y, z)$ prostora pridružujemo homogene koordinate $(x_1 : x_2 : x_3 : x_4)$, $x_4 \neq 0$ tako da važi

$$x = \frac{x_1}{x_4}, \;\; y = \frac{x_2}{x_4}, \;\; z = \frac{x_3}{x_4}.$$

Tačke za koje važi $x_4 = 0$ pripadaju tzv. **beskonačno dalekoj ravni**. Afini prostor $\mathbb{R}^3$ kome je dodata beskonačno daleka ravan $x_4 = 0$ zove se dopunjeni afini prostor ili projektivni prostor.

Može se pokazati da se paralelne prave i ravni seku u tačkama beskonačno daleke ravni.

Projektivna preslikavanja prostora definišu se analogno onima u ravni, ali 4×4 matricama. Slično se pokazuje da su afina preslikavanja specijalan slučaj projektivnih. Projektivno preslikavanje prostora je određeno slikama 5 tačaka u opštem položaju (tj. takvima da nikoje četiri nisu komplanarne).

Primer B.6. U homogenim koordinatama prostora odrediti jednačine centralnog projektovanja prostora iz tačke $O(0, 0, 0)$ na ravan $z = d$.

Rešenje: Označimo sa $M(x, y, z)$ afine koordinate originalne tačke, a sa $M(x', y', d)$ koordinate njene centrale projekcije. Pošto su vektori $\overrightarrow{OM}$ i $\overrightarrow{OM'}$ kolinearni, dobijamo projekciju u afinim koordinatama:

$$x' = \frac{ax}{z}, \;\; y' = \frac{ay}{z}, \;\; z' = a.$$

Lako se proveri da se prethodna relacija može zapisati u homogenim koordinatama sa:

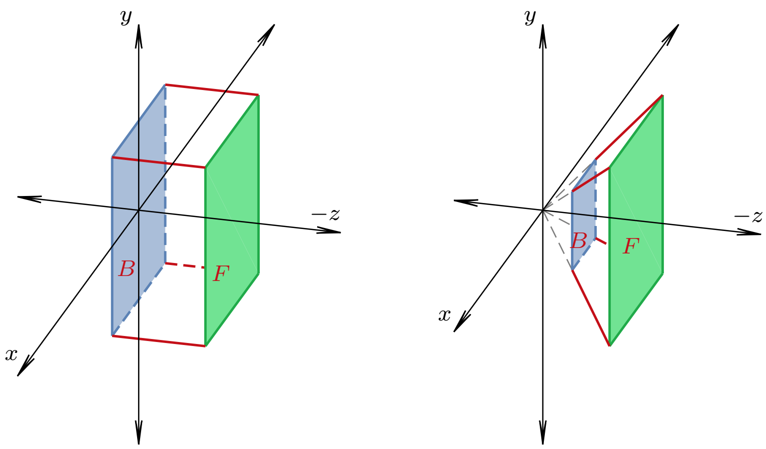
$$x'_1 = ax_1, \;\; x'_2 = ax_2, \;\; x'_3 = ax_3, \;\; x'_4 = x_3.$$

Drugim rečima, traženo projektovanje u homogenim koordinatama je dato sa:

$$\lambda \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

Primetimo da prethodna formula, strogo govoreći, ne predstavlja projektivno preslikavanje, jer je determinanta matrice preslikavanja jednaka nuli. Naime, projektovanje preslikava prostor na ravan, pa zato nije bijekcija i nema inverzno preslikavanje. ◇

U računarskoj grafici prostor, odnosno deo scene, koji projektujemo na ekran ograničavamo **zapreminom pogleda**. Kanonska zapremina pogleda za paralelno projektovanje je kvadar određen ravnima $x=-1$, $x=1$, $y=-1$, $y=1$, $z=-1$ i $z=0$, dok je kanonska zapremina pogleda za perspektivno projektovanje zarubljena piramida sadržana u tom kvadru. Ravan $z=0$ naziva se **prednja ravan odsecanja** F, a ravan $z=-1$ **zadnja ravan odsecanja** B (videti Sliku 115).



Slika 115: Kanonska zapremina pogleda za paralelno (levo) i perspektivno (desno) projektovanje

Primer B.7. Odrediti projektivno preslikavanje koje preslikava zarubljenu piramidu na kanonski kvadar. Prednja ravan odsecanja zarubljene piramide je $F: z=-1$, a zadnja ravan odsecanja $B: z=a$, $-1<a<0$.

Rešenje: Slično Primeru B.5 u ravni, preslikavanje u homogenim koordinatama je dato sa:

$$\lambda x_1' = x_1, \quad \lambda x_2' = x_2, \quad \lambda x_3' = \frac{1}{a+1}x_3 - \frac{a}{a+1}x_4, \quad \lambda x_4' = -x_3,$$

za $\lambda \in \mathbb{R}$, odnosno sa:

$$x' = -\frac{x}{z}, \quad y' = -\frac{y}{z}, \quad z' = \frac{1}{1+a}\left(\frac{a}{z} - 1\right),$$

u afinim koordinatama. Čitaocu se ostavlja da proveri ili izvede ove formule. $\diamond$

Zadatak B.1. Odrediti presečnu tačku Q pravih $a: 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0$ i $b: 2x_1 - x_2 + x_3 = 0$.

Zadatak B.2. Odrediti projektivno preslikavanje ravni $\bar{\mathbb{R}}^2$ kojim se krug $x^2 + y^2 = 1$ preslikava u:

(a) hiperbolu $x'^2 - y'^2 = 1$; (b) parabolu $y'^2 = x'$.