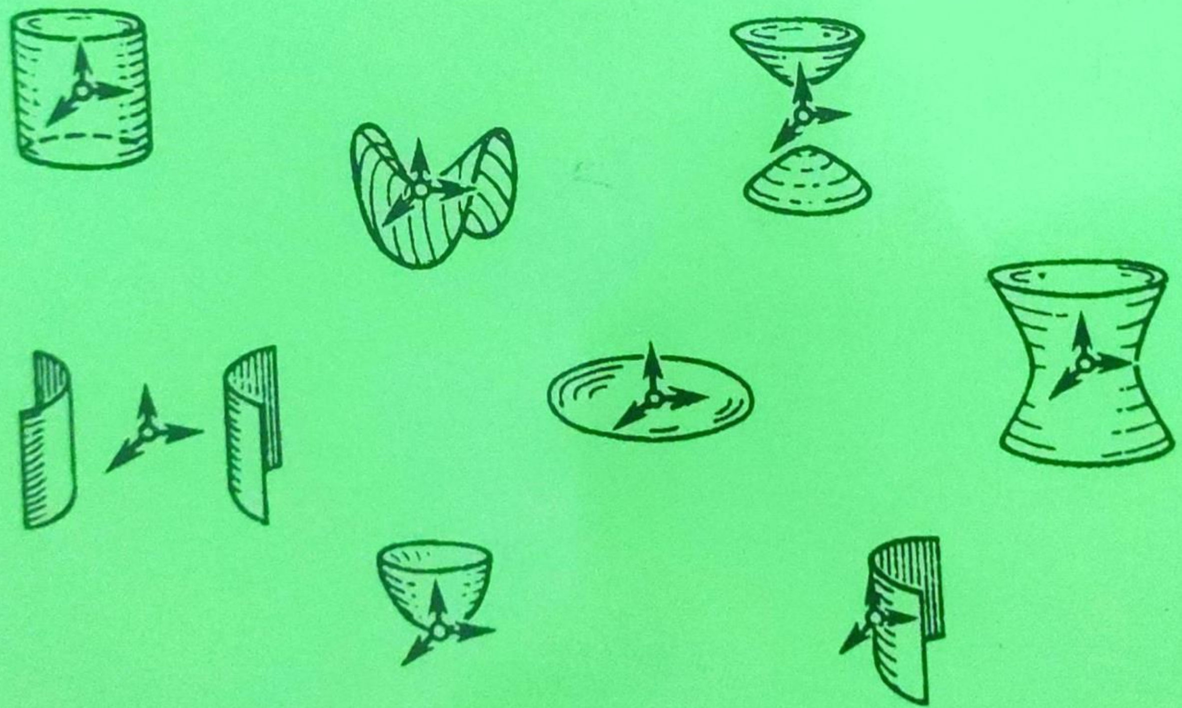
Mirjana Đorić
Olivera Milenković

ZBIRKA ZADATAKA IZ ANALITIČKE GEOMETRIJE



MATEMATIČKI FAKULTET
BEOGRAD, 2018

dr Mirjana Đ. Đorić, dr Olivera M. Milenković

ZBIRKA ZADATAKA IZ ANALITIČKE GEOMETRIJE

Sedmo izdanje

Izdavač: Matematički fakultet, Studentski trg 16, Beograd

Za izdavača: prof. dr Zoran Rakić

Izdavački odbor: prof. dr Miloš Arsenović, predsednik
prof. dr Olga Atanacković
prof. dr Mirjana Đorić
prof. dr Predrag Janičić
prof. dr Zoran Petrović

Recenzenti: dr Zoran Rakić
dr Dragoslav Ljubić

Korice, obrada teksta i slika: autori
mr Mladen Cvetković
Branislav Đurđevac

Štampa i povez: Donat graf, Beograd

Tiraž: 300 primeraka

MSC (2010): 51N20, 51N10

Tekst pripremljen u LaTeX-u

Predgovor

Ova *Zbirka zadataka*, čije je prvo izdanje štampano 1995. godine, namenjena je prvenstveno studentima matematike, ali može koristiti i studentima prirodnih i tehničkih nauka, kao i učenicima srednjih škola, gde se izučava analitička geometrija. U ovom izdanju otklonjene su štamparske greške, dodati su mnogi zadaci i slike, a neka rešenja su dopunjena i obogaćena.

Pri izboru materijala, obradi i koncipiranju knjige, trudile smo se da što potpunije prikažemo razne metode koje se mogu koristiti za rešavanje zadataka u oblasti analitičke geometrije. Takođe, u prvom poglavlju su date i neke definicije, teoreme i formule koje se često koriste pri rešavanju zadataka.

Zadaci u zbirci su, ili rešeni u potpunosti (neki čak i na više načina), ili je dat samo rezultat. Pri tome smo nastojale da ukažemo na najčešće greške i da razjasnimo razlog nepravilnog razmišljanja. Međutim, savetujemo čitaocima da prethodno samostalno reše sve zadatke i da svoja rešenja uporede sa navedenim rešenjima. Po našem mišljenju to je najbolji način da se čitalac uputi na samostalan rad u rešavanju zadataka, a ujedno se savlađuju razne tehnike rešavanja zadataka i obogaćuju ideje čitalaca.

Pri izradi ove zbirke, pored navedene literature, korišćeni su i neki zadaci rađeni na vežbama i ispitima tokom prethodnih godina koje su držali: dr Mihail Arsenović, dr Neda Bokan, dr Mirko Janc, dr Gojko Kalajdžić, dr Zoran Lučić i autori.

Za izradu crteža korišćen je i program GCLC 2.0 autora mr Predraga Janičića, asistenta Matematičkog fakulteta u Beogradu.

Zadovoljstvo nam je da se zahvalimo recenzentima ove zbirke, docentima dr Dragoslavu Ljubiću i dr Zoranu Rakiću, na učinjenim korisnim primedbama i sugestijama kojima je znatno poboljšana prvobitna verzija rukopisa. Zahvaljujemo se i mr Mladenu Cvetkoviću i Branislavu Đurđevcu na pomoći pri tehničkoj obradi teksta i izradi slika.

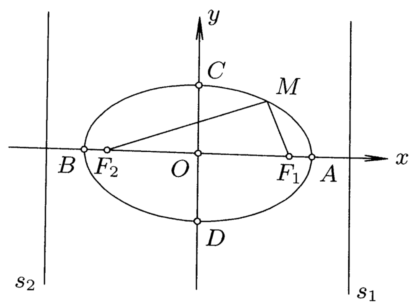
I pored sveg uloženog truda, svesne smo da je u ovoj zbirci ostalo još niz mesta koja bi trebalo učiniti još boljim i preciznijim, pa bi smo bile veoma zahvalne svima koji nam na ta mesta ukažu.

Matematički fakultet — Mirjana Đorić

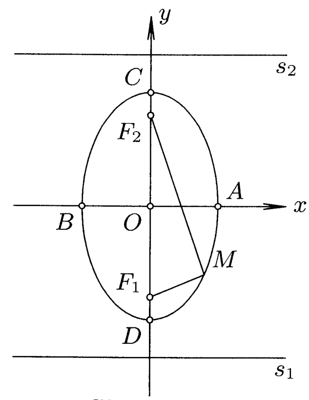
Beograd, 11. novembar 1998. — Olivera Milenković

Sadržaj

Elipsa



Slika T11



Slika T12

Kanonska jednačina elipse je $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (pogledati sliku T11) i pri tome važi:

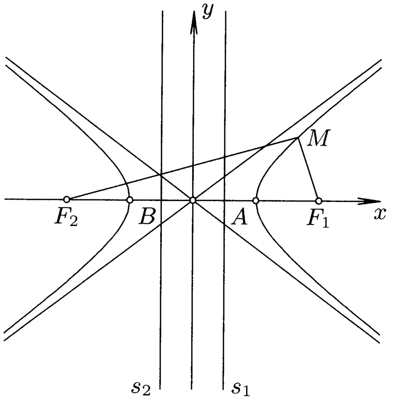
- parametarske jednačine elipse su $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $t \leq 0 < 2\pi$,
- parametri a i b su redom dužine velike i male poluose,
- tačka $O(0,0)$ je centar,
- tačke $A(a,0)$, $B(-a,0)$, $C(0,b)$ i $D(0,-b)$ su temena,
- tačke $F_1(c,0)$ i $F_2(-c,0)$ su žiže (fokusi),
- $MF_1 + MF_2 = 2a$,
- broj $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ je linearni ekscentricitet i on je jednak rastojanju žiža (fokusa) od centra elipse,
- prava Ox je glavna, a prava Oy sporedna osa,
- broj $e = \frac{c}{a} = \frac{d(M,F_1)}{d(M,s_1)} = \frac{d(M,F_2)}{d(M,s_2)}$ je brojni (numerički) ekscentricitet $(0 < e < 1)$,
- rastojanja tačke $M(x,y)$ od njenih žiža iznose $r_1 = MF_1 = a - ex$ i $r_2 = MF_2 = a + ex$,
- prave $s_1 : x - \frac{a}{e} = 0$ i $s_2 : x + \frac{a}{e} = 0$ su direktrise (rastojanje od centra elipse do direktrise je $d(O,s_1) = \frac{a}{e}$) koje odgovaraju redom žižama F_1 i F_2,

- jednačina tangente elipse $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ u njenoj tački $M(x_1,y_1)$ je

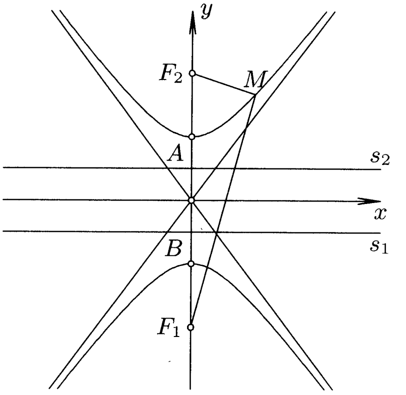
$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1. \tag{T16}$$

Ukoliko su Ox i Oy ose elipse, a fokusi se nalaze na osi Oy (pogledati sliku T12), njena jednačina je $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, pri čemu je $0<a<b$, $c=\sqrt{b^2-a^2}$, $e=\dfrac{c}{b}$ i direktrise su prave $y\pm\dfrac{b}{e}=0$.

Hiperbola



Slika T13



Slika T14

Kanonska jednačina hiperbole je $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ (pogledati sliku T13) i pri tome važi:

- parametarske jednačine hiperbole su $x=a\ \mathrm{ch}\ t$, $y=b\ \mathrm{sh}\ t$, $t\in\mathbf{R}$,
- prava Ox je glavna, a prava Oy sporedna osa,
- parametri a i b su dužine realne i imaginarne poluose hiperbole,
- tačka $O(0,0)$ je centar,
- tačke $A(a,0)$ i $B(-a,0)$ su temena,
- tačke $F_1(c,0)$ i $F_2(-c,0)$ su žiže (fokusi),
- $|MF_1-MF_2|=2a$,

- broj $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ je linearni ekscentricitet i on je jednak rastojanju žiža (fokusa) od centra elipse,

- broj $e = \frac{c}{a} = \frac{d(M, F_1)}{d(M, s_1)} = \frac{d(M, F_2)}{d(M, s_2)}$, pri čemu je M proizvoljna tačka hiperbole je brojni (numerički) ekscentricitet ($e > 1$),

- rastojanja tačke $M(x, y)$ od njenih žiža iznose $r_1 = MF_1 = |ex - a|$ i $r_2 = MF_2 = |ex + a|$,

- prave $s_1 : x - \frac{a}{e} = 0$ i $s_2 : x + \frac{a}{e} = 0$ su direktrise (rastojanje od centra hiperbole do direktrise je $d(O, s_1) = \frac{a}{e}$) koje odgovaraju redom žižama F_1 i F_2,

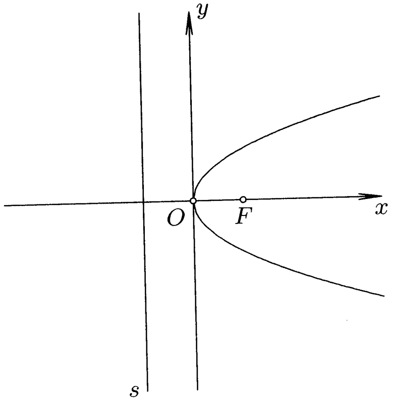
- prave $t_1 : bx + ay = 0$ i $t_2 : bx - ay = 0$ su asimptote hiperbole rastojanje od žiža do asimptota je $d(F_i, t_j) = b$, $i, j = 1, 2$,

- jednačina tangente hiperbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ u njenoj tački $M(x_1, y_1)$ je

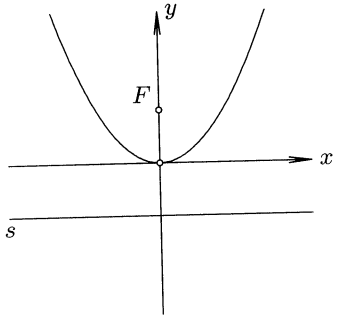
$$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1. \tag{T17}$$

Ukoliko su Ox i Oy ose hiperbole, a fokusi se nalaze na osi Oy (pogledati sliku T14), njena jednačina je $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, pri čemu je $e = \frac{c}{b}$ i direktrise su prave $y \pm \frac{b}{e} = 0$.

Parabola



Slika T15



Slika T16

Kanonska jednačina parabole je $y^2 = 2px, \quad p > 0$ (pogledati sliku T15), i pri tome važi:

- Ox je osa parabole,
- tačka $F(\frac{p}{2}, 0)$ je žiža (fokus) parabole,
- prava $s:\ x + \dfrac{p}{2} = 0$ je direktrisa parabole,
- $p = d(F, s)$,
- tačka $O(0,0)$ je teme parabole,
- jednačina tangente parabole $y^2 = 2px$, u njenoj tački $M(x_1, y_1)$ je

$$yy_1 = p(x + x_1), \tag{T18}$$

- za tačke M koje pripadaju paraboli je $d(M, F) = d(M, s)$, tj. brojni (numerički) ekscentricitet je $e = 1$.

Jednačina parabole čija je žiža $F(0, \frac{q}{2})$, a teme koordinatni početak (pogledati sliku T16) je $x^2 = 2qy$, $q \neq 0$, a njena direktrisa je prava $y + \dfrac{q}{2} = 0$.

U pogodno izabranom polarnom koordinatnom sistemu jednačina

$$\rho = \frac{p}{1 - e\cos\theta}$$

je jednačina elipse ($e < 1$), hiperbole ($e > 1$) i parabole ($e = 1$), pri čemu je broj p za parabolu upravo njen parametar, a za elipsu i hiperbolu $p = \dfrac{b^2}{a}$.

Može se dokazati da opšta jednačina površi drugog reda u odnosu na pravougli Dekartov koordinatni sistem opisuje jednu od sledećih sedamnaest površi:

1. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ elipsod

2. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = -1$ imaginarni elipsoid

3. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ jednograni hiperboloid

4. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1$ dvograni hiperboloid

5. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0$ konus

6. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 0$ imaginarni konus

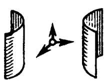
7. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 2z$ eliptički paraboloid

8. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 2z$ hiperbolički paraboloid

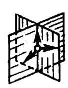
9. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ eliptički cilindar

10. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = -1$ imaginarni eliptički cilindar

11. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0$ dve imaginarne ravni koje se seku

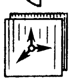


12. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ hiperbolički cilindar



13. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0$ dve ravni koje se seku

14. $x^2 = 2py$, $p > 0$ parabolički cilindar



15. $x^2 = a^2$, $a \neq 0$ dve paralelne ravni

16. $x^2 = -a^2$, $a \neq 0$ dve imaginarne paralelne ravni

17. $x^2 = 0$ dve ravni koje se poklapaju.

189. Dokazati da je zbir kvadrata dužina dva međusobno konjugovana dijametra elipse konstantan.

190. Neka su duži OA i OB dva uzajamno normalna poludijametra elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a,b>0)$. Dokazati da je rastojanje centra O elipse od tetive AB konstanta koja zavisi od a i b.

191. Kroz jednu žižu elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a,b>0)$, povučene su dve tetive koje su paralelne sa jednim parom konjugovanih dijametara. Naći zbir dužina tih tetiva.

192. Naći jednačine krivih drugog reda koje imaju zajednički centar $C(a,b)$, $a,b\in\mathbf{R}$.

193. Odrediti jednačinu elipse čiji je centar tačka $C(2,1)$, a prave $y-2=0$ i $x-y=0$ predstavljaju tangente u krajevima dva međusobno konjugovana dijametra.

194. Odrediti jednačinu elipse koja je upisana u paralelogram čija su temena tačke $O(0,0)$, $A(4,0)$, $C(6,2)$ i $B(2,2)$.

195. Dokazati da se elipsa i hiperbola koje imaju zajedničke žiže (konfokalne krive) seku pod pravim uglom.

196. Dokazati da je razlika kvadrata dužina dva međusobno konjugovana dijametra hiperbole konstantna.

197. Proizvoljna prava l seče hiperbolu u tačkama P i Q, a asimptote hiperbole u tačkama M i N. Dokazati da je $MP=NQ$.

198. Odrediti jednačinu skupa tačaka koje su simetrične centru hiperbole u odnosu na tangente hiperbole.

199. Neka je A jedno teme hiperbole. Dokazati da je geometrijsko mesto središta svih njenih tetiva kojima je A jedna krajnja tačka kriva drugog reda. Dobijenu krivu izometrijskom transformacijom svesti na kanonski oblik.

200. Dokazati da je površina trougla, čije su stranice asimptote hiperbole i tangenta na hiperbolu, konstantna (ne zavisi od izbora tangente).

201. Odrediti jednačinu jednakostranične hiperbole čija je žiža tačka $F(2,0)$ i asimptota prava $p:\ x=1$.

202. Polara hiperbole $xy=1$ sa polom u tački P seče pravu PO u tački M (tačka O je koordinatni početak). Odrediti geometrijsko mesto tačaka M ako tačka P neprekidno klizi po pravoj $l:\ \ x+y-3=0$. Izometrijskom transformacijom svesti dobijenu krivu na kanonski oblik.

247. Odrediti tačku Q koja je simetrična tački $P(3,-2,-4)$ u odnosu na ravan $\alpha:\ 6x+2y-3z-75=0$.

248. Odrediti ortogonalnu projekciju tačke $M(2,3,1)$ na pravu $l:\ \dfrac{x+7}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z+2}{3}$.

249. Odrediti tačku Q koja je simetrična tački $P(-1,-2,1)$ u odnosu na pravu $l:\ \dfrac{x}{-2}=\dfrac{y-3}{4}=\dfrac{z-4}{1}$.

250. Data je prava $l:\ \dfrac{x}{2}=\dfrac{y-2}{0}=\dfrac{z-4}{-1}$ i tačka $M(1,-2,3)$. Odrediti jednačinu normale iz tačke M na pravu l.

251. Odrediti jednačinu ravni γ koja pripada pramenu ravni koji je određen ravnima $\alpha:\ A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ i $\beta:\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ $(\alpha\not\equiv\beta)$.

252. Odrediti jednačinu ravni koja sadrži presek ravni $\beta:\ x+y+z-1=0$ i $\gamma:\ x-y+2z+2=0$ i polovi odsečak prave $l:\ \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{-2}$ između datih ravni.

253. Odrediti jednačinu ravni γ koja je normalna na presek ravni $\alpha:\ x+2y=3$ i $\beta:\ -2x+z=1$, a udaljena je od koordinatnog početka za $\sqrt{21}$.

254. Odrediti λ tako da se prave $p:\ \dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+4}{5}=\dfrac{z-1}{-2}$ i $q:\ \dfrac{x-\lambda}{2}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z+5}{0}$. seku. Koje su koordinate presečne tačke?

255. Odrediti jednačinu ravni koja sadrži pravu $l:\ \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-3}{3}$ i normalna je na ravan $\alpha:\ 2x-4y+z+5=0$.

256. Odrediti jednačinu prave koja sadrži tačku $L(2,-1,7)$ i seče prave $p:\ \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-4}{-3}=\dfrac{z-3}{1}$ i $q:\ \dfrac{x-7}{-1}=\dfrac{y-11}{-3}=\dfrac{z+2}{0}$.

257. Odrediti zajedničku normalu mimoilaznih pravih $p:\ \dfrac{x-4}{1}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z-12}{-1}$ i $q:\ \dfrac{x-3}{-7}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{3}$.

258. Odrediti rastojanje između mimoilaznih pravih $l_1:\ \dfrac{x-9}{4}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z}{1}$ i $l_2:\ \dfrac{x}{-2}=\dfrac{y+7}{9}=\dfrac{z-2}{2}$.

298. Odrediti jednačinu konusa čije je teme tačka $M(1,4,5)$ i koji dodiruje sferu $\sigma: \ (x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=4$. Ako je izvor svetlosti u tački M odrediti koja kriva je kontura senke sfere σ na ravan Oxz.

299. Sfera $\mathcal{S}$ ima centar u tački $S(1,1,0)$ i dodiruje ravan $\alpha: \ x+2y+2z-9=0$. Odrediti jednačinu krive koja je kontura senke sfere $\mathcal{S}$ na ravan $\beta: \ 15x+6y+10z+30=0$, ako se svetlosni izvor nalazi u tački $T(6,3,0)$.

300. Odrediti jednačinu konusa čiji je vrh tačka $S(0,0,1)$, a direktrisa elipsa u ravni Oxy data na sledeći način: velika osa dužine 4 paralelna je sa osom Ox, numerički ekscentricitet elipse je $\frac{1}{2}$, elipsa se nalazi u drugom kvadrantu $(x \le 0, y \ge 0)$ i dodiruje koordinatne ose.

301. Date su tačke $O(0,0,0)$, $A(a,0,0)$, $B(0,a,0)$ i $C(0,0,a)$, $a \neq 0$.

1) Odrediti jednačinu sfere σ_1 koja sadrži tačke O, A, B i C.
2) Odrediti jednačinu sfere σ_2 čiji glavni krug sadrži tačke A, B i C.
3) Kada parametar a varira, krug koji sadrži tačke A, B i C opisuje jednu površ. Odrediti njenu jednačinu.
4) Odrediti jednačinu konusa koji za $a=6$ dodirije sfere σ_1 i σ_2.

302. Odrediti jednačinu unije svih pravih koje sadrže koordinatni početak i koje sadrže tačke krive određene jednačinama $x^2+y^2+z^2-2x+4y=4$ i $3x+5y+2z+7=0$.

303. Odrediti jednačinu konusa čije je teme tačka $M(1,1,1)$ i koji je opisan oko elipsoida $x^2+2y^2+3z^2=1$.

304. Odrediti jednačinu površi koju obrazuju tangente elipsoida $x^2+\dfrac{y^2}{2}+z^2=1$ koje sadrže tačku $M(5,5,5)$ i jednačinu preseka te površi sa ravni Oxy.

305. a) Ispitati uzajamni položaj prave $p: \ x=kt+x_0$, $y=mt+y_0$, $z=nt+z_0$, $t \in \mathbf{R}$, $k^2+m^2+n^2 \neq 0$ i elipsoida $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$.
b) Odrediti jednačinu geometrijskog mesta pravih koje dodiruju elipsoid $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ i sadrže tačku $S(x',y',z')$.

306. Odrediti jednačinu cilindra čije su generatrise paralelne pravoj $l: \ \dfrac{x}{k}=\dfrac{y}{m}=\dfrac{z}{n}$ i koje dodiruju elipsoid $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$, $c<b<a$.

307. Odrediti jednačinu kružnog konusa kome je prava $o: \ x-y=0$, $4x-z=0$ osa i kome je ravan $\alpha: \ x+y+z=0$ tangentna ravan.

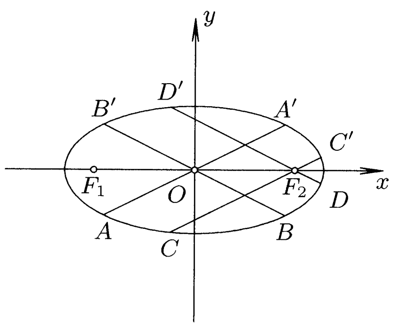
$k_2 = -\dfrac{b^2}{a^2 k_1}$, posle kraćeg računa se dobija da je $AB^2 + CD^2 = 4(a^2 + b^2)$.

Drugi slučaj (AB i CD su velika i mala osa elipse): U ovom slučaju je $AB = 2a$ i $CD = 2b$, pa je $AB^2 + CD^2 = 4(a^2 + b^2)$.

Na osnovu dokazanog sledi da je zbir kvadrata dužina dva međusobno konjugovana dijametra elipse konstantan i jednak $4(a^2 + b^2)$.

Napomena: Specijalni slučaj kada se za par međusobno konjugovanih dijametara uzimaju baš ose elipse je veoma pogodan, jer se na osnovu njega može dobiti koliki će biti zbir kvadrata dužina dva međusobno konjugovana dijametra u opštem slučaju. Ovo olakšava sređivanje izraza u kome se pojavljuje koeficijent pravca k_1 dijametra d_1 u prvom slučaju (kada AB i CD nisu ose elipse).

190. Ako je d rastojanje centra O od tetive AB, koja zadovoljava postavku zadatka, onda se može dokazati da je $d^2 = \dfrac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}$, tj. da ono ne zavisi od izbora tetive AB već samo od date elipse.



Slika uz zad. 191

191. Ako su CC' i DD' zadate tetive, onda se može dokazati da je traženi zbir dužina tetiva jednak $CC' + DD' = \dfrac{2(a^2 + b^2)}{a}$.

192. Ako je $2f(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33}$, kriva data sa $2f(x, y) = 0$ (1), a tačka $C(a, b)$ centar date krive, tada je $a_{13} = -(a_{11}a + a_{12}b)$ i $a_{23} = -(a_{12}a + a_{22}b)$, (na osnovu formule (T20)), odnosno kriva je data sa $a_{11}(x - a)^2 + 2a_{12}(x - a)(y - b) + a_{22}(y - b)^2 + \tilde{a}_{33} = 0$. (2)

193. Kako je tačka $C(2, 1)$ centar tražene elipse, njena jednačina je oblika

$$a_{11}(x-2)^2 + 2a_{12}(x-2)(y-1) + a_{22}(y-1)^2 + a_{33} = 0 \quad (1)$$

(pogledati zadatak 192), pri čemu koeficijente a_{11}, a_{12}, a_{22} i a_{33} treba odrediti na osnovu preostalih uslova zadatka. Tangente u presečnim tačkama dijametra i konusnog preseka paralelne su konjugovanom dijametru (pogledati zadatak 183), pa su prave $d_1 : y$ [illegible] 1 i $d_2 : y = x - 1$ jedan par konjugovanih dijametara i njihovi koeficijenti pravaca su $k_1 = 0$ i $k_2 = 1$. Kako za koeficijente pravaca konjugovanih dijametara važi da je $a_{11} + a_{12}(k_1 + k_2) + a_{22}k_1k_2 = 0$, to je u ovom slučaju

$$a_{12} + a_{11} = 0. \quad (2)$$

Dodirna tačka A tangente $y = 2$ dobija se u preseku sa odgovarajućim dijametrom d_2 i njene koordinate su $A(3,2)$, a dodirna tačka B tangente $y = x$ dobija se u preseku sa odgovarajućim dijametrom d_1 i njene koordinate su $B(1,1)$. Kako tačke A i B pripadaju elipsi, zamenom njihovih koordinata u jednačinu elipse dobijaju se jednačine

$$a_{11} + 2a_{12} + a_{22} + a_{33} = 0, \quad (3)$$

$$a_{11} + a_{33} = 0. \quad (4)$$

Rešavanjem sistema (2)-(4) dobija se da je tražena elipsa data jednačinom $x^2 - 2xy + 2y^2 - 2x + 1 = 0$.

Napomena: Zadatak se može rešiti i bez korišćenja zadatka 192, ali se u tom slučaju dobija komplikovaniji sistem jednačina.

194. I način: Kako je tražena elipsa upisana u dati paralelogram stranice ovog paralelograma su tangente tražene elipse.

Paralelne tangente elipse dodiruju elipsu u tačkama koje su krajevi jednog dijametra (pogledati zadatak 183), pa je centar elipse podjednako udaljen od njih. Prema tome, centar tražene elipse je jednako udaljen od pravih OA i BC i jednako udaljen od pravih OB i AC, te je on središte paralelograma, tačka $S(3,1)$. Zbog toga je jednačina tražene elipse data sa $2f(x,y) = a_{11}(x-3)^2 + 2a_{12}(x-3)(y-1) + a_{22}(y-1)^2 + a_{33} = 0$ (do ovog oblika jednačine elipse se dolazi postavljanjem uslova da joj je tačka S centar, pogledati i zadatak 192). Koordinatni početak je teme datog paralelograma, pa prema tome pripada dvema različitim tangentama elipse. Zbog toga tražena elipsa ne može sadržati ovu tačku, te je koeficijent a_{33} u jednačini elipse različit od nule. Može se, zbog lakšeg računa, uzeti da je npr. $a_{33} = 1$.

Prema tome potrebno je još odrediti koeficijente a_{11}, a_{12} i a_{22}, a to će biti učinjeno korišćenjem uslova da su prave $y = 0$ i $y = x$ tangente tražene elipse.

Kako je prava $OA:\ y = 0$ tangenta tražene elipse u nekoj tački $M(t,0)$, $0 < t < 4$, to je njena jednačina $[a_{11}(t-3) - a_{12}]x + [a_{12}(t-3) - a_{22}]y - 3[a_{11}(t-3) - a_{12}] = 0$ (pogledati formulu (T30)), odakle sledi

$$a_{11}(t-3) - a_{12} = 0, \quad a_{12}(t-3) - a_{22} \neq 0. \quad (1)$$

Kako je prava $OA:\ y = 0$ tangenta tražene elipse, ona dodiruje elipsu u tačno jednoj tački, pa jednačina $a_{11}(x-3)^2 + 2a_{12}(x-3)(0-1) + a_{22}(0-$

$1)^2 + 1 = 0$ ima tačno jedno rešenje po promenljivoj x, tj. diskriminanta $D = (-2a_{11} - 2a_{12})^2 - 4a_{11}(a_{11} + 2a_{12} + a_{22} + 1)$ je jednaka nuli. Odavde se dobija da je

$$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} - a_{11} = 0. \quad (2)$$

Na isti način se iz uslova da je prava $OB: \ y = x$ tangenta dobija da je $4a_{12}^2 - 4a_{11}a_{22} - a_{11} - 2a_{12} - a_{22} = 0$, odnosno, korišćenjem relacije (2), da je

$$3a_{11} - 2a_{12} - a_{22} = 0. \quad (3)$$

Kako je tačka $M(t, 0)$, $0 < t < 4$, dodirna tačka tangente OA i elipse, to ona pripada elipsi pa je

$$a_{11}(t-3)^2 + 2a_{12}(t-3)(0-1) + a_{22}(0-1)^2 + 1 = 0, \quad (4)$$

odnosno

$$a_{22} = 2a_{12}(t-3) - a_{11}(t-3)^2 - 1. \quad (5)$$

Zamenom koeficijenta a_{12} (iz (1)) u jednačinu (5) dobija se

$$a_{22} = a_{11}(t-3)^2 - 1. \quad (6)$$

Zamenom izračunatih vrednosti a_{12} i a_{22}, (iz (1) i (6)) u funkciji od a_{11} i t, u (3) dobija se

$$3a_{11} - 2a_{11}(t-3) - [a_{11}(t-3)^2 - 1] = 0, \quad (7)$$

a odatle je $a_{11} = \frac{1}{t(t-4)}$, $a_{12} = \frac{t-3}{t(t-4)}$ i $a_{22} = \frac{9-2t}{t(t-4)}$. Jednačine elipsi koje zadovoljavaju uslove zadatka su date sa

$$(x-3)^2 + 2(t-3)(x-3)(y-1) + (9-2t)(y-1)^2 + t(t-4) = 0, \quad 0 < t < 4.$$

II način: Dati paralelogram je slika kvadrata pri nekom afinom preslikavanju. Biće određena jednačina elipse koja je upisana u kvadrat čija su temena tačke $O(0,0)$, $A_1(2,0)$, $C_1(2,2)$ i $B_1(0,2)$. Očigledno, postoji beskonačno mnogo takvih elipsi. Tražena elipsa, upisana u dati paralelogram, biće slika neke elipse upisane u kvadrat $OA_1C_1B_1$ pri tom afinom preslikavanju, pa će postojati i beskonačno mnogo elipsi upisanih u dati paralelogram.

Paralelne tangente elipse dodiruju elipsu u tačkama koje su krajevi jednog dijametra (pogledati zadatak 183), pa je centar elipse podjednako udaljen od njih. Prema tome, centar tražene elipse je jednako udaljen od pravih OA_1 i C_1B_1 i jednako udaljen od pravih OB_1 i A_1C_1, te je on središte kvadrata, tj. tačka $S_1(1,1)$. Zbog toga je jednačina elipse upisane u kvadrat $OA_1C_1B_1$ data sa $a_{11}(x-1)^2 + 2a_{12}(x-1)(y-1) + a_{22}(y-1)^2 + a_{33} = 0$ (do ovog oblika jednačine elipse se dolazi postavljanjem uslova da joj je tačka S_1 centar, pogledati zadatak 192). Koordinatni početak je teme datog kvadrata, pa prema tome pripada dvema različitim tangentama elipse. Zbog toga tražena elipsa ne može sadržati ovu tačku, te je koeficijent a_{33} u jednačini elipse različit od nule. Može se, zbog lakšeg računa, uzeti da je npr. $a_{33} = 1$. Prema tome, potrebno je još odrediti koeficijente a_{11}, a_{12} i a_{22}, a to će biti učinjeno korišćenjem činjenice da su prave $y = 0$ i $x = 0$ tangente elipse upisane u kvadrat $OA_1C_1B_1$.

Kako je prava $OA_1 : y = 0$ tangenta, ona dodiruje elipsu u tačno jednoj tački, pa jednačina $a_{11}(x-1)^2 + 2a_{12}(x-1)(0-1) + a_{22}(0-1)^2 + 1 = 0$ ima tačno jedno rešenje po promenljivoj x, tj. diskriminanta $D = (-2a_{11} - 2a_{12})^2 - 4a_{11}(a_{11} + 2a_{12} + a_{22} + 1)$ je jednaka nuli. Odavde se dobija da je

$$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} - a_{11} = 0. \quad (8)$$

Na isti način se iz uslova da je prava $OB_1 : x = 0$ tangenta dobija da je

$$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} - a_{22} = 0. \quad (9)$$

Na osnovu (8) i (9) sledi da je $a_{11} = a_{22}$. (10)

Neka je tačka $M_1(t, 0)$, $0 < t < 2$ dodirna tačka tangente OA_1 i elipse. Tada je

$$a_{11}(t-1)^2 + 2a_{12}(t-1)(0-1) + a_{22}(0-1)^2 + 1 = 0, \quad (11)$$

pa je

$$a_{22} = 2a_{12}(t-1) - a_{11}(t-1)^2 - 1. \quad (12)$$

Zamenom koeficijenta a_{22} (iz (12)) u jednačinu (8) dobija se

$$a_{12}^2 - 2a_{11}a_{12}(t-1) + a_{11}^2(t-1)^2 = 0. \quad (13)$$

Kako je $a_{11} \neq 0$ (jer bi u suprotnom bilo i $a_{12} = a_{22} = 0$, pa tražena kriva ne bi bila elipsa), sledi da je $(\frac{a_{12}}{a_{11}})^2 - 2\frac{a_{12}}{a_{11}}(t-1) + (t-1)^2 = 0$ i odatle $\frac{a_{12}}{a_{11}} = t - 1$. Zbog toga je

$$a_{12} = a_{11}(t-1). \quad (14)$$

Zamenom izračunatih vrednosti a_{12} i a_{22}, u funkciji od a_{11} i t, u (11) dobija se da je $a_{11} = \frac{1}{t^2-2t}$, pa je tražena elipsa upisana u kvadrat $OA_1C_1B_1$ oblika $\frac{1}{t^2-2t}(x-1)^2 + 2\frac{t-1}{t^2-2t}(x-1)(y-1) + \frac{1}{t^2-2t}(y-1)^2 + 1 = 0$, odnosno

$$(x-1)^2 + 2(t-1)(x-1)(y-1) + (y-1)^2 + t^2 - 2t = 0, \quad 0 < t < 2. \quad (15)$$

Za razne vrednosti parametra t $(0 < t < 2)$ dobijaju se sve elipse upisane u ovaj kvadrat. Specijalno za $t = 1$, odnosno kada je dodirna tačka središte duži OA_1, dobija se krug $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$.

Dati paralelogram $OACB$ je slika kvadrata $OA_1C_1B_1$ pri afinom preslikavanju u kome je tačka O fiksna, a tačke A_1, B_1 i C_1 se redom preslikavaju u tačke A, B i C. Korišćenjem ovih uslova može se odrediti traženo afino preslikavanje i ono je dato formulama

$$x_1 = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y, \quad y_1 = y \quad (16)$$

(pri čemu se podrazumeva da se tačka $P_1(x_1, y_1)$ preslikava u tačku $P(x, y)$.) Ovom transformacijom se elipse upisane u kvadrat $OA_1C_1B_1$ $(x_1-1)^2 + 2(t-1)(x_1-1)(y_1-1) + (y_1-1)^2 + t^2 - 2t = 0, \quad 0 < t < 2$ preslikavaju u tražene elipse upisane u paralelogram $OACB$

$$(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y - 1)^2 + 2(t-1)(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y - 1)(y-1) + (y-1)^2 + t^2 - 2t = 0, \quad 0 < t < 2.$$

Specijalno se za sliku kruga upisanog u kvadrat dobija elipsa

$$x^2 - 2xy + 5y^2 - 4x - 4y + 4 = 0. \quad (17)$$

Napomena 1: Za nalaženje elipse (17) (na drugačiji način), može se koristiti i da središta duži OA i OB pripadaju elipsi i da su odgovarajući dijametri koji sadrže ove tačke konjugovani. Postavljanjem odgovarajućih jednačina dobija se sistem $a_{11}+2a_{12}+a_{22}+1 = 0$, $4a_{11}+1 = 0$ i $a_{12}+a_{11} = 0$ čijim se rešavanjem dobija da je $a_{11} = -\frac{1}{4}$ $a_{12} = \frac{1}{4}$ i $a_{22} = -\frac{5}{4}$, odakle se direktnom zamenom u jednačinu elipse (4) (sa centrom u tački $S(3, 1)$) dobija (17).

Napomena 2: U opštem slučaju ne mora biti ispunjen uslov da su dijametri koji sadrže dodirne tačke datih tangenti i elipse međusobno konjugovani. U specijalnom slučaju, kada su dodirne tačke središta stranica paralelograma, ovi dijametri jesu konjugovani. U ovom slučaju oni su paralelni datim tangentama, a njihova konjugovanost sledi na osnovu osobine da su tangente u krajevima jednog dijametra paralelne njemu konjugovanom dijametru (pogledati zadatak 183). Ako se koristi da je ova elipsa slika kruga pri afinom preslikavanju, uslov konjugovanosti dobija se na osnovu toga što su ovi dijametri slike dva međusobno normalna prečnika kruga, a međusobno normalni prečnici kruga se pri afinom preslikavanju slikaju u konjugovane dijametre. U opštem slučaju takođe važi da se konjugovani dijametri afinom transformacijom preslikavaju u konjugovane dijametre, a ovo je samo jedan specijalni slučaj.

195. Bez gubljenja opštosti može se pretpostaviti da je elipsa data jednačinom $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$, a hiperbola jednačinom $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, pri čemu je $B^2 = A^2 - c^2$, $b^2 = c^2 - a^2$, $0 < a < c < A$ i zajedničke žiže imaju koordinate $F_1(-c, 0)$ i $F_2(c, 0)$. Tada jedna od presečnih tačaka ima koordinate $M(\frac{Aa}{c}, \frac{Bb}{c})$, a koeficijenti pravaca tangente elipse i tangente hiperbole u ovoj

256. I način: Neka su preseci tražene prave sa datim pravama p i q redom tačke M i N. Tada su kordinate ovih tačaka $M(2t+1, -3t+4, t+3)$ i $N(-s+7, -3s+11, -2)$ za neke $s, t \in \mathbf{R}$. Iz uslova da su tačke L, M i N kolinearne sledi da je $\overrightarrow{LM} = \lambda \overrightarrow{LN}$ za neko $\lambda \in \mathbf{R}$ ($\overrightarrow{LN} \neq \vec{0}$ jer tačka L ne pripada pravoj q), pa je $2t-1 = \lambda(-s+5)$, $-3t+5 = \lambda(-3s+12)$ i $t-4 = -9\lambda$. Rešavanjem poslednjeg sistema dobija se da je $\lambda = \frac{1}{3}$, $s = 2$, $t = 1$, pa su koordinate tačaka M i N date sa $M(3,1,4)$ i $N(5,5,-2)$, a tražena prava je prava LM i data je jednačinom $n : \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-7}{-3}$.

II način: Tačke $P(1,4,3)$ i $Q(7,11,-2)$ pripadaju redom pravama p i q, a $\vec{u}_p(2,-3,1)$ i $\vec{u}_q(-1,-3,0)$ su vektori pravih p i q. Neka je $K(x,y,z)$ proizvoljna tačka tražene prave. Tada iz uslova da tražena prava seče pravu p sledi da je $[\overrightarrow{LK}, \vec{u}_p, \overrightarrow{LP}] = 0$, a iz uslova da tražena prava seče pravu q sledi da je $[\overrightarrow{LK}, \vec{u}_q, \overrightarrow{LQ}] = 0$. Zbog toga je tražena prava n presek ravni $x+y+z-8=0$ i $3x+y+3z-26=0$, tj. $n : \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-7}{-3}$.

257. I način: Vektori $\vec{u}_p(1,2,-1)$ i $\vec{u}_q(-7,2,3)$ su vektori pravih p i q. Neka su preseci tražene zajedničke normale n sa datim pravama p i q redom tačke M i N. Tada su koordinate ovih tačaka $M(t+4, 2t-3, -t+12)$ i $N(-7s+3, 2s+1, 3s+1)$ za neke $s, t \in \mathbf{R}$. Iz uslova je prava n normalna na date prave p i q sledi da je $\overrightarrow{MN} \cdot \vec{u}_p = 0$ i $\overrightarrow{MN} \cdot \vec{u}_q = 0$, tj. $t = 3$ i $s = 0$, pa su koordinate tačaka M i N date sa $M(7,3,9)$ i $N(3,1,1)$. Tražena zajednička normala je prava MN i data je jednačinom $n : \dfrac{x-7}{4} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z-9}{8}$.

Napomena: Ako se zadatak rešava na ovaj način dobijaju se i koordinate presečnih tačaka zajedničke normale i datih pravih, što se može iskoristiti za izračunavanje rastojanja između datih mimoilaznih pravih.

II način: Tačke $P(4,-3,12)$ i $Q(3,1,1)$ pripadaju redom pravama p i q, a $\vec{u}_p(1,2,-1)$ i $\vec{u}_q(-7,2,3)$ su vektori pravih p i q. Neka je $K(x,y,z)$ proizvoljna tačka tražene prave. Vektor zajedničke normale $\vec{u}_n$ normalan je i na vektor $\vec{u}_p$ i na vektor $\vec{u}_q$, pa je kolinearan sa njihovim vektorskim proizvodom. Neka je $\vec{u}_n = \frac{1}{4}\vec{u}_p \times \vec{u}_q$, tj. $\vec{u}_n(2,1,4)$. Iz uslova da tražena prava seče pravu p sledi da je $[\overrightarrow{KP}, \vec{u}_p, \vec{u}_n] = 0$, a iz uslova da tražena prava seče pravu q sledi da je $[\overrightarrow{KQ}, \vec{u}_q, \vec{u}_n] = 0$, pa je tražena prava presek ravni $3x-2y-z-6=0$ i $5x+34y-11z-38=0$, tj. $n : \dfrac{x-7}{4} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z-9}{8}$.

258. Rastojanje između dve mimoilazne prave je najkraće rastojanje između tačaka koje pripadaju ovim pravama.

I način: Može se pokazati da je rastojanje mimoilaznih pravih jednako rastojanju tačaka u kojima njihova zajednička normala seče te prave. Određivanjem zajedničke normale (kao u zadatku 257) dobija se da su odgovarajuće presečne tačke $M_1(1,4,-2)$ i $M_2(-2,2,4)$, pa je rastojanje datih mimoilaznih pravih jednako 7.

II način: Neka je α ravan koja sadrži datu pravu l_1 i paralelna je datoj pravoj l_2. Tada je njena jednačina $\alpha: \ 3x+2y-6z-23=0$. Kako je $d(l_1,l_2)=d(l_2,\alpha)=d(L_2,\alpha)$, pri čemu je L_2 proizvoljna tačka prave l_2 (npr. $L_2(0,-7,2)$), sledi da je traženo rastojanje jednako 7.

III način: Tačke $L_1(9,-2,0)$ i $L_2(0,-7,2)$ pripadaju redom pravama l_1 i l_2, a $\vec{u}_{l_1}(4,-3,1)$ i $\vec{u}_{l_2}(-2,9,2)$ su redom vektori pravih l_1 i l_2. Za paralelepiped određen vektorima $\vec{u}_{l_1}$, $\vec{u}_{l_2}$ i $\overrightarrow{L_1L_2}$ visina koja odgovara strani određenoj vektorima $\vec{u}_{l_1}$ i $\vec{u}_{l_2}$ je upravo traženo rastojanje između datih mimoilaznih pravih l_1 i l_2. Površina strane određene vektorima $\vec{u}_{l_1}$ i $\vec{u}_{l_2}$ jednaka je $B=|\vec{u}_{l_1}\times\vec{u}_{l_2}|$, a zapremina ovog paralelepipeda jednaka je $\mathcal{V}=|[\overrightarrow{L_1L_2},\vec{u}_{l_1},\vec{u}_{l_2}]|$, pa je

$$d(l_1,l_2)=\frac{|[\overrightarrow{L_1L_2},\vec{u}_{l_1},\vec{u}_{l_2}]|}{|\vec{u}_{l_1}\times\vec{u}_{l_2}|},$$

odakle se dobija da je traženo rastojanje jednako 7.

259. Kako tražena ravan σ treba, po uslovu zadatka, da sa ravni γ obrazuje ugao $\frac{\pi}{4}$, to za vektore ravni $\vec{n}_\sigma(a,b,c)$, $a^2+b^2+c^2\neq 0$ i $\vec{n}_\gamma(1,-4,-8)$, koristeći formulu (T46), važi

$$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{|\vec{n}_\gamma\cdot\vec{n}_\sigma|}{|\vec{n}_\gamma||\vec{n}_\sigma|}. \qquad (1)$$

Sređivanjem izraza (1) dobija se da za koordinate vektora $\vec{n}_\sigma$ važi

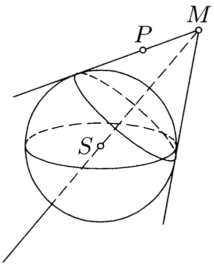
$$81(a^2+b^2+c^2)=2(a-4b-8c)^2. \qquad (2)$$

a) Kako po uslovu zadatka ravan σ sadrži datu pravu p, to je $\vec{n}_\sigma\cdot\vec{u}_p=0$, gde je $\vec{u}_p(1,0,-1)$ vektor prave p, tj. $a=c$. Na osnovu uslova (2) je zbog toga

$$64a^2-112ab+49b^2=0 \quad (3).$$

Za $b=0$ na osnovu relacije (3) sledi da je i $a=0$, pa bi koordinate vektora $\vec{n}_\sigma$ bile $(0,0,0)$, što nije moguće. Zbog toga je $b\neq 0$. Deljenjem relacije (3) sa b^2 dobija se kvadratna jednačina po $\frac{a}{b}$ koja ima jedinstveno dvostruko rešenje $\frac{a}{b}=\frac{7}{8}$, pa su koordinate vektora $\vec{n}_\sigma$ npr. $(7,8,7)$. Kako tražena ravan σ po uslovu zadatka sadrži pravu p, to ona sadrži i tačku $P(1,2,0)\in p$, pa je ona data jednačinom $\sigma: \ 7(x-1)+8(y-2)+7z=0$, tj. $\sigma: \ 7x+8y+7z-23=0$ i σ je jedina ravan koja ispunjava uslove zadatka.

I način: Tačka S, centar sfere, je na rastojanju 2 (poluprečnik sfere) od svake od izvodnica traženog konusa. Ako je $P(x,y,z)$ proizvoljna tačka na nekoj od izvodnica tada je $d(S,MP) = 2 = \dfrac{|\overrightarrow{MP} \times \overrightarrow{MS}|}{|\overrightarrow{MP}|}$. Iz poslednje relacije dobija se da je jednačina konusa data sa



Slika uz zad. 298

$$2 = \frac{|(x-1, y-4, z-5) \times (0,-2,-4)|}{\sqrt{(x-1)^2 + (y-4)^2 + (z-5)^2}}$$

Posle kraćeg sređivanja dobija se $4x^2 + 3y^2 - 4yz - 8x - 4y + 16z - 28 = 0$.

II način: Jednačina prave koja sadrži tačku M je $p: \dfrac{x-1}{m} = \dfrac{y-4}{n} = \dfrac{z-5}{k}$, ili u parametarskom obliku $x = mt + 1$, $y = nt + 4$, $z = kt + 5$, $t \in \mathbf{R}$. Za presek sfere σ i prave p parametar t koji odgovara presečnoj tački mora da ispunjava uslov $(mt + 1 - 1)^2 + (nt + 4 - 2)^2 + (kt + 5 - 1)^2 = 4$, tj. $(m^2 + n^2 + k^2)t^2 + 4(n + 2k)t + 16 = 0$. Ako prava p pripada traženom konusu tada postoji jedinstvena presečna tačka sfere σ i prave p, pa poslednja kvadratna jednačina po t ima jedinstveno rešenje. Zbog toga je odgovarajuća diskriminanta $D = 16(n + 2k)^2 - 64(m^2 + n^2 + k^2) = -16(4m^2 + 3n^2 - 4nk)$ jednaka nuli, tj. $4m^2 + 3n^2 - 4nk = 0$ (1). Ako prava pripada konusu tada je n različito od nule, jer bi u slučaju da je $n = 0$ prava p pripadala ravni $y = 4$, a ova ravan sa sferom σ nema presečnih tačaka, te ni prava p ne bi mogla imati zajedničkih tačaka sa sferom. Kako je $n \neq 0$ deljenjem relacije (1) sa n^2 dobija se da je $4\dfrac{m^2}{n^2} + 3 - 4\dfrac{k}{n} = 0$. Iz jednačine prave p sledi da je $\dfrac{m}{n} = \dfrac{x-1}{y-4}$ i $\dfrac{k}{n} = \dfrac{z-5}{y-4}$, pa je jednačina traženog konusa $4\left(\dfrac{x-1}{y-4}\right)^2 + 3 - 4\dfrac{z-5}{y-4} = 0$. Posle množenja sa $(y-4)^2$ ($y - 4 \neq 0$ za sve tačke konusa osim za tačku M) i sređivanja dobija se da je traženi konus $4x^2 + 3y^2 - 4yz - 8x - 4y + 16z - 28 = 0$, pri čemu se lako proverava da i koordinate tačke M zadovoljavaju ovu jednačinu.

IIIa način: Neka je prava $p: \dfrac{x-1}{x_0 - 1} = \dfrac{y-4}{y_0 - 4} = \dfrac{z-5}{z_0 - 5} = \lambda$, $\lambda \in \mathbf{R}$ izvodnica konusa, gde je tačka $Q(x_0, y_0, z_0)$ dodirna tačka izvodnice i sfere. Kako tačka Q pripada sferi to je $(x_0 - 1)^2 + (y_0 - 2)^2 + (z_0 - 1)^2 = 4$ (2). Koristeći jednačine prave p dobija se $x - 1 = \lambda(x_0 - 1)$, $y - 4 =$

$\lambda(y_0 - 4)$ i $z - 5 = \lambda(z_0 - 5)$, odnosno $x_0 = \dfrac{x-1}{\lambda} + 1$, $y_0 = \dfrac{y-4}{\lambda} + 4$ i $z_0 = \dfrac{z-5}{\lambda} + 5$ ($\lambda \neq 0$ osim za tačku M). Zamenom u (2) dobija se posle kraćeg računa da je $(x-1)^2 + (y - 4 + 2\lambda)^2 + (z - 5 + 4\lambda)^2 = 4\lambda^2$. Kako je poslednja jednačina kvadratna po λ, da bi izvodnica i sfera imale samo jednu zajedničku tačku, neophodno je da diskriminanta bude jednaka nuli. Izračunavanjem ove diskriminante i njenim izjednačavanjem sa nulom dobija se da je jednačina traženog konusa $4x^2 + 3y^2 - 4yz - 8x - 4y + 16z - 28 = 0$.

IIIb način: Kao i u prethodnom načinu rešavanja pretpostavi se da je izvodnica konusa prava $p: \dfrac{x-1}{x_0-1} = \dfrac{y-4}{y_0-4} = \dfrac{z-5}{z_0-5} = \lambda$, $\lambda \in \mathbf{R}$, pri čemu je tačka $M_0(x_0, y_0, z_0)$ dodirna tačka izvodnice i sfere. Kako tačka M_0 pripada sferi, to je $(x_0-1)^2 + (y_0-2)^2 + (z_0-1)^2 = 4$ (3). Eliminacijom parametara λ, x_0, y_0 i z_0 dobija se jednačina konusa, pri čemu će u ovom slučaju eliminacija biti izvedena na drugačiji način. Tangentna ravan na sferu u tački M_0 je data sa $\tau: \ (x-1)(x_0-1)+(y-2)(y_0-2)+(z-1)(z_0-1) = 4$ i ona treba da sadrži tačku $M(1,4,5)$ pa se zamenom koordinata tačke M u jednačinu ravni dobija da mora biti ispunjeno $y_0 + 2z_0 - 6 = 0$ (4).

Kako je tačka $S(1,2,1)$ centar sfere, prava SM je osa konusa, a ravan kojoj pripada direktrisa konusa je normalna na osu, pa je vektor $\vec{u}_\alpha$ ove ravni kolinearan sa $\overrightarrow{SM}$, npr. $\vec{u}_\alpha(0,1,2)$, i sadrži tačku M_0. Relacija (4) određuje jednačinu ravni α u kojoj je direktrisa konusa koja pripada sferi i ona glasi $\alpha: \ y + 2z - 6 = 0$, odnosno, na osnovu formule (4), sledi da tačka M_0 pripada ovoj ravni.

Kao i u prethodnom načinu rešavanja izračunava se da je $x_0 = \dfrac{x-1}{\lambda} + 1$, $y_0 = \dfrac{y-4}{\lambda} + 4$ i $z_0 = \dfrac{z-5}{\lambda} + 5$, Zamenom u (4) dobija se da je $\lambda = \dfrac{14 - y - 2z}{8}$, pa je $x_0 = \dfrac{8x - y - 2z + 6}{14 - y - 2z}$, $y_0 = \dfrac{4y - 8z + 24}{14 - y - 2z}$ i $z_0 = \dfrac{-5y - 2z + 30}{14 - y - 2z}$. Zamenom izrčunatih vrednosti za x_0, y_0 i z_0 u (3) i sređivanjem dobija se jednačina konusa $4x^2 + 3y^2 - 4yz - 8x - 4y + 16z - 28 = 0$.

IV način: Kako je tačka $S(1,2,1)$ centar sfere, prava SM je osa konusa, a sve izvodnice konusa, pošto je konus kružni, obrazuju jednake uglove sa osom. Neka je taj ugao jednak α, a M_0 tačka dodira bilo koje izvodnice sa sferom. Trougao $\triangle SMM_0$ je pravougli, pri čemu je prav ugao kod temena M_0, stranica SM_0 je poluprečnik sfere, tj. $SM_0 = 2$, a dužina stranice SM je jednaka rastojanju tačaka S i M i iznosi $2\sqrt{5}$. Zbog toga je $MM_0 = \sqrt{SM^2 - SM_0^2} = 4$, pa je $\cos\alpha = \dfrac{MM_0}{SM} = \dfrac{4}{2\sqrt{5}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$. Za proizvoljnu tačku $P(x,y,z)$ sa neke od izvodnica je, prema tome, $\cos\alpha = \dfrac{|\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MS}|}{|\overrightarrow{MP}|\,|\overrightarrow{MS}|}$ i jednačina konusa je $\dfrac{2}{\sqrt{5}} = \dfrac{(x-1,y-4,z-5)\cdot(0,-2,-4)}{\sqrt{(x-1)^2+(y-4)^2+(z-5)^2}2\sqrt{5}}$. Posle kraćeg sređivanja dobija se $4x^2+3y^2-4yz-8x-4y+16z-28=0$.

V način: Kao i u prethodnim rešenjima neka je tačka $M_0(x_0,y_0,z_0)$ dodirna tačka neke od izvodnica konusa sa sferom. Tada je MM_0 normalno na SM, pa je $(x_0-1,y_0-4,z_0-5)\cdot(x_0-1,y_0-2,z_0-1)=0$ (5), pri čemu tačka M_0 pripada sferi čiji je prečnik SM i M_0 pripada datoj sferi σ, pa je $(x_0-1)^2+(y_0-2)^2+(z_0-1)^2=4$ (6). U preseku ove dve sfere dobija se direktrisa konusa koja pripada sferi σ. Ako se uzme proizvoljno rešenje sistema (5)-(6), npr. $x_0=1$, $y_0=4$ i $z_0=1$, ono određuje neku tačku $A(1,4,1)$ koja pripada direktrisi. Tada je prava $MA: \dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y-4}{0}=\dfrac{z-5}{4}$ izvodnica, odnosno generatrisa konusa i ona se u parametarskom obliku može zapisati kao $x=1$, $y=4$, $z=5+t$, $t\in\mathbf{R}$. Prava $MS: \dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-1}{2}$ je osa konusa. Rotacijom proizvoljne tačke P sa generatrise oko ose dobija se krug koji pripada traženom konusu i ovakvi krugovi čine konus. Ti krugovi se mogu dobiti u preseku sfera $(x-1)^2+(y-4)^2+(z-5)^2=\alpha^2$ (7) sa centrom u temenu konusa i odgovarajućeg poluprečnika $\alpha=MP$ i ravni koje su normalne na osu konusa i sadrže tačku P, te su oblika $y+2z=\beta$ (8), gde β treba odrediti tako da tačka P pripada toj ravni. Veza između parametara α i β dobija se korišćenjem činjenice da tačka P pripada generatisi, tj. $P(1,4,5+t)$, $t\in\mathbf{R}$, a istovremeno pripada i sferi (7) i ravni (8), pa je $t^2=\alpha^2$ i $4+10+2t=\beta$. Odavde sledi da je veza između odgovarajućih parametara α i β data sa $(\frac{\beta}{2}-7)^2=\alpha^2$, tzv. karakteristična jednačina, pa koordinate tačaka sa traženog kruga koji se dobija rotacijom tačke P oko ose ispunjavaju uslov $(\dfrac{y+2z}{2}-7)^2=(x-1)^2+(y-4)^2+(z-5)^2$. Posle kraćeg sređivanja dobija se $4x^2+3y^2-4yz-8x-4y+16z-28=0$. Kako je P bila proizvoljna tačka sa generatrise ovo je jednačina traženog konusa jer se svaka tačka sa konusa dobija rotacijom neke od tačaka sa generatrise oko ose konusa.

Senka

Neka je tačka $T(m,n,k)$ izvor svetlosti, ravan α ravan na koju pada senka, tačka $S(a,b,c)$ centar sfere i neka je sfera zadata jednačinom $\sigma: (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$.

Ukoliko su tačke T i S sa raznih strana ravni α, tada je za

1) $d(S,\alpha)\geq r$ senka jednaka praznom skupu,

2) $d(S,\alpha)<r$ kontura "senke" jednaka preseku sfere i ravni, pri čemu je

Slika uz zad. 298

1) ukoliko postoje dve takve izvodnice, tj. ako je $d(S,\alpha) - r < d(T,\alpha) < d(S,\alpha) + r$, tada je kontura senke jedna grana hiperbole, a senka sfere je "unutrašnja oblast" te grane hiperbole

2) ukoliko takva izvodnica postoji i jedinstvena je, tj. ako je $d(T,\alpha) = d(S,\alpha) + r$, tada je senka sfere "unutrašnja oblast" parabole

3) ukoliko je $d(T,\alpha) > d(S,\alpha)+r$, tada takve izvodnice nema i senka sfere je, u opštem slučaju, oblast ograničena elipsom, a u specijalnom, kada je osa normalna na ravan na koju pada senka, senka je unutrašnjost kruga.

4) ukoliko je $d(T,\alpha) \leq d(S,\alpha) - r$ senka sfere je prazan skup.

Iz uslova zadatka tačka T i sfera su sa iste strane ravni Oxz i sfera dodiruje ovu ravan. Da bi se odredila jednačina konture senke sfere treba ispitati da li postoji izvodnica konusa, čije je teme tačka T i koji je opisan oko date sfere, koja je paralelna ravni Oxz, uz vođenje računa o tome da je rastojanje izvora svetlosti od ravni na koju pada senka veće od odgovarajućih rastojanja tačaka sfere od te ravni. Ova izvodnica se lako nalazi, ukoliko postoji, i to tako što se kroz tačku T (izvor svetlosti) postavi ravan paralelna ravni Oxz (ravan na koju pada senka) i proveri se da li ona ima presek sa konusom, odnosno sa sferom oko koje je konus opisan. U ovom slučaju to je ravan $y = 4$ i ona sa sferom ima jedinstvenu zajedničku tačku koja ima koordinate $(1, 4, 1)$, pa postoji tačno jedna izvodnica paralelna ravni Oxz, a sve ostale tačke sfere su bliže ravni na koju pada senka od tačaka ove izvodnice. Zbog toga je kontura senke sfere σ parabola (u zadatku se nije tražilo da se nađe njena jednačina i da se ona svodi na kanonski oblik), a senka sfere "unutrašnja oblast" te parabole.

U slučaju da se traži i jednačina konture senke sfere, ona se, za ovakav položaj izvora svetlosti i sfere, dobija kao presek konusa opisanog oko sfere sa vrhom u izvoru svetlosti i ravni na koju pada senka. U ovom zadatku jednačina konusa je $4x^2 + 3y^2 - 4yz - 8x - 4y + 16z - 28 = 0$, a ravan na koju pada senka je Oxz ravan, pa je jednačina konture senke data sa $y = 0$, $4x^2+3y^2-4yz-8x-4y+16z-28 = 0$, odnosno $y = 0$, $4x^2-8x+16z-28 = 0$. Ova kriva je parabola $y = 0$, $(x-1)^2 = -4(z-2)$.

Napomena: Da bi kontura senke bila nađena parabola, neophodno je da koordinate izvora svetlosti budu takve da rastojanje izvora svetlosti od ravni na koju pada senka (u ovom slučaju od Oxz ravni) bude veće od rastojanja svih tačaka sfere osim jedne (čija je senka "beskonačno" daleka tačka). U slučaju kada je rastojanje izvora svetlosti od ravni na koju pada senka manje od rastojanja bilo koje tačke sfere od ove ravni tada sfera ne baca senku. Bez obzira na to, ako bi se samo tražio presek konusa sa temenom u datom izvoru svetlosti koji je opisan oko sfere i ravni na koju pada senka ovaj presek bi postojao, pa se ne bi dobilo tačno rešenje. U ovom slučaju je samo tačka $A(1,4,1)$ sfere na istom rastojanju od ravni Oxz kao i izvor svetlosti M, dok su sve ostale tačke na manjem rastojanju, pa je nađena parabola stvarno senka date sfere σ na ravan Oxz.

299. Kako je $d(S,\alpha)=2$, jednačina sfere je $\mathcal{S}:\ (x-1)^2+(y-1)^2+z^2=4$. Kontura senke sfere $\mathcal{S}$ na ravan β je presek ravni β i konusa opisanog oko sfere $\mathcal{S}$ čije je teme tačka T (pogledati zadatak 298). Izvodnice konusa su prave koje sadrže tačku T i dodiruju sferu. Neka je $M(x,y,z)$ proizvoljna tačka na konusu, a $P(X,Y,Z)$ tačka na izvodnici TM. Tada je prava TM zadata sa $TM:\ \dfrac{X-6}{x-6}=\dfrac{Y-3}{y-3}=\dfrac{Z}{z}=\lambda,\quad \lambda\in\mathbf{R}$, ili u parametarskom obliku $X=\lambda(x-6)+6$, $Y=\lambda(y-3)+3$, $Z=\lambda z$, $\lambda\in\mathbf{R}$. Jednačina konusa se dobija nalaženjem veze između koordinata x, y i z tačke M, odnosno eliminacijom X, Y i Z. Prava TM dodiruje sferu $\mathcal{S}$ ako i samo ako sledeća jednačina ima jedinstveno rešenje po λ : $(\lambda(x-6)+6-1)^2+(\lambda(y-3)+3-1)^2+(\lambda z)^2=4$. Posle kraćeg sređivanja, dobija se da je jednačina konusa opisanog oko sfere $\mathcal{S}$ sa temenom u tački T : $84y^2-100z^2+80xy-240x+24y+684=0$. Rastojanje izvora svetlosti od ravni β je $d(T,\beta)=\frac{138}{19}$, a rastojanje centra sfere od ravni β je $d(S,\beta)=\frac{51}{19}$. Tačke T i S su sa iste strane ravni β, pa su rastojanja tačaka sfere od ravni β veća od $\frac{51}{19}-2$ i manja od $\frac{51}{19}+2$. Kako je rastojanje izvora svetlosti od ravni β veće od rastojanja svih tačaka sfere od ove ravni, to je senka sfere na ravan β unutrašnjost elipse, a kontura senke sfere je data sa $84y^2-100z^2+80xy-240x+24y+684=0$, $15x+6y+10z+30=0$.

Napomena: Jednačina traženog konusa može se odrediti i korišćenjem uslova da je za proizvoljnu tačku M sa konusa $d(TM,S)=2$.

300. Kako je velika poluosa elipse $a=2$, a numerički ekscentricitet elipse $\frac{1}{2}$, to je $c=a\cdot e=1$ i $b^2=a^2-c^2=3$. Iz uslova da je elipsa u drugom kvadrantu i dodiruje koordinatne ose, sledi da je njena jednačina $\dfrac{(x+2)^2}{4}+\dfrac{(y-\sqrt{3})^2}{3}=1$, $z=0$. Neka je, dalje, $M_1(x_1,y_1,z_1)$ tačka na ovoj elipsi, a $M(x,y,z)$ tačka na traženom konusu. Tada su vektori $\overrightarrow{SM}$ i $\overrightarrow{SM_1}$ kolinearni, pa je $\dfrac{x}{x_1}=\dfrac{y}{y_1}=\dfrac{z-1}{z_1-1}$ i $\dfrac{(x_1+2)^2}{4}+\dfrac{(y_1-\sqrt{3})^2}{3}=1$, $z_1=0$. Eliminisanjem x_1,y_1 i z_1 iz ovih jednačina dobija se da je jednačina konusa $3(x+2-2z)^2+4(y-\sqrt{3}+\sqrt{3}z)^2=12(z-1)^2$, tj. $3x^2+4y^2+12z^2-12xz+8\sqrt{3}yz+12x-8\sqrt{3}y-24z+12=0$.

301. 1) Neka je S_1 centar i r_1 poluprečnik sfere σ_1. Koristeći uslove $S_1A=S_1B=S_1C=S_1O=r_1$, dobija se da sfera σ_1 ima jednačinu

$$(x-\frac{a}{2})^2+(y-\frac{a}{2})^2+(z-\frac{a}{2})^2=\frac{3a^2}{4}.$$

ISBN 978-86-7589-127-7