Универзитет у Београду
Математички факултет

Бобан Карапетровић

УВОД У КОМПЛЕКСНУ АНАЛИЗУ

- ЗБИРКА ЗАДАТАКА -

Београд, 2020.

Аутор: др Бобан Карапетровић

УВОД У КОМПЛЕКСНУ АНАЛИЗУ
ЗБИРКА ЗАДАТАКА

Рецензенти: др Владимир Божин
др Мирољуб Јевтић
др Миодраг Матељевић

Уредник: др Милош Арсеновић

Издавач: Математички факултет у Београду

Обрада текста: аутор

Штампа: Донат граф

Тираж: 300 примерака

CIP – Каталогизација у публикацији
– Народна библиотека Србије, Београд

517.53/.54(075.8)(076)

КАРАПЕТРОВИЋ, Бобан, 1990 -
Увод у комплексну анализу : збирка задатака / Бобан Карапетровић.
– Београд : Математички факултет, 2020 (Београд : Донат граф). – II,
285 стр. : граф. прикази ; 25 cm

На врху насл. стр.: Универзитет у Београду.
– Тираж 300. – Библиографија: стр. 279 - 281. – Регистар.

ISBN 978-86-7589-143-7

а) Функције комплексне променљиве – Задаци

COBISS.SR-ID 14349321

ISBN 978-86-7589-143-7

Садржај

Увод

Основу ове збирке задатака, која је намењена почетном и једносеместралном курсу из комплексне анализе, чине одговарајући материјали са вежби и предавања, које је аутор држао у оквиру курсева *Увод у комплексну анализу* и *Комплексне функције* на Математичком факултету, Универзитета у Београду и који прате план и програм поменутих курсева. Имајући у виду да су теме које се обрађују на уводним курсевима комплексне анализе у доброј мери стандардизоване, оваква збирка задатака може бити од користи и на другим курсевима са сличном тематиком.

У свакој од укупно петнаест глава које улазе у састав ове збирке задатака, налази се по двадесет посебно одабраних и детаљно решених задатака. Приликом одабира задатака, на примарном месту је била њихова разноврсност, како у погледу тежине, тако и у погледу презентовања различитих техника неопходних за њихово решавање, уз напомену, да је у случају појединих, најчешће рачунских задатака, где је потребно остварити неопходну рутину, обезбеђен већи број задатака са сличном техником решавања. Један део задатака је оригиналан, други део задатака је са писмених испита које је аутор предлагао на већ поменутим курсевима, док је трећи део задатака преузет у неком облику из наведене литературе (корисно је погледати и неку од следећих збирки задатака са сличном тематиком [4, 16, 26, 36, 40, 46, 49]). Истакнимо да је за усвајање одређених појмова комплексне анализе, неопходно познавање основних елемената реалне анализе (на пример, погледати [27] и [44]). Свака од поменутих петнаест глава снабдевена је одговарајућим теоријским уводом, где су наведене основне ознаке, појмови и тврђења, која су неопходна за решавање задатака који припадају тој глави. Докази свих наведених тврђења, односно теорема, могу се наћи у пописаној литератури (видети неке од класичних књига, радова и монографија [1–3, 7–15, 18–25, 28–35, 37–39, 41–43, 45, 47, 48, 50]). Збирку задатака прати и велики број илустрација, које би требало да допринесу квалитету датих решења и бољем разумевању самих задатака. Поред тога, због обима материје коју треба упознати у једносеместралном курсу и његових могућих приоритета, поједини делови ове збирке задатака могу бити изостављени, што се посебно односи на издвојене одељке у којима се наводи, неретко са доказом, неко од класичних тврђења комплексне анализе које пружа дубљи увид у тематику главе у којој се налази, али није неопходно за одржавање самог курса.

Прве две главе ове збирке задатака су посвећене комплексним бројевима, њиховој поларној форми и експоненцијалној функцији, као једној од основних елементарних функција. Централни објекти комплексне анализе, холоморфне функције, разматрају се у трећој глави. У четвртој глави су заступљена билинеарна пресликавања и њихова основна својства. Пета глава доноси појам комплексног интеграла, док се у шестој глави заправо разматрају основне интегралне теореме комплексне анализе, Кошијева теорема и Кошијева интегрална формула. Тејлоров развој холоморфних функција јесте тема седме главе. Затим, поред Лиувилове теореме, у осмој глави се проучавају

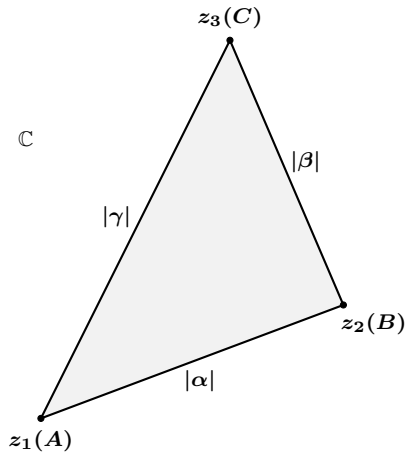
конвексни скупови у комплексној равни и Основна теорема алгебре. Нека од главних својстава холоморфних функција која су представљена класичним тврђењима, као што су Теорема јединости и Принцип максимума, изучавају се у деветој и десетој глави, тим редом. Лоранов развој и изоловани сингуларитети јесу тематика једанаесте главе. Кошијева теорема о остацима, уз њене велике примене, јесте заступљена у дванаестој глави. Теорема која се односи на број нула холоморфних функција, односно Рушеова теорема, разматра се у тринаестој глави, док се у четрнаестој глави разматра Шварцова лема, као једна од фундаменталних последица Принципа максимума. На крају, петнаеста, уједно и последња глава, садржи разне задатке из претходно наведених области.

Са друге стране, збирка задатака има и два додатка. Први додатак се односи на интересантну примену комплексних бројева у решавању комбинаторних проблема (за више информација погледати [5, 6]). Основна теорема алгебре јесте разматрана и доказана у осмој глави, као једна од последица Лиувилове теореме. У другом додатку је наведен доказ Основне теореме алгебре који као суштински елемент користи Принцип минимума из десете главе, при чему се Принцип минимума за полиноме може извести и елементарно. Наведени елементаран доказ Основне теореме алгебре базиран је на раду [17].

Посебно желим да се захвалим рецензентима који су пажљиво прочитали рукопис у првобитном облику и изнели низ корисних примедби и сугестија, чиме су значајно допринели његовом бољем квалитету.

Бобан Карапетровић

Задатак 1.4 Нека су z_1, z_2 и z_3 темена $\Delta\, ABC$ у комплексној равни. Доказати да је $\Delta\, ABC$ једнакостраничан ако и само ако важи $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1$.



Слика уз Задатак 1.4.

Решење. Нека је $\alpha = z_2 - z_1$, $\beta = z_3 - z_2$ и $\gamma = z_1 - z_3$. Тада странице AB, BC и CA имају дужине $|\alpha|$, $|\beta|$ и $|\gamma|$, тим редом. Најпре, претпоставимо да је $\Delta\, ABC$ једнакостраничан. Тада је

$$|\alpha| = |\beta| = |\gamma|. \tag{1.3}$$

Приметимо да је $\alpha + \beta + \gamma = 0$, одакле добијамо

$$\frac{|\alpha|^2}{\alpha} + \frac{|\beta|^2}{\beta} + \frac{|\gamma|^2}{\gamma} = \overline{\alpha} + \overline{\beta} + \overline{\gamma} = 0. \tag{1.4}$$

Користећи (1.3) и (1.4) закључујемо да је

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = 0,$$

одакле после множења са $\alpha\beta\gamma$ добијамо да важи $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 0$, што је еквивалентно са једнакости

$$(z_2 - z_1)(z_3 - z_2) + (z_3 - z_2)(z_1 - z_3) + (z_1 - z_3)(z_2 - z_1) = 0,$$

односно са $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1$. Са друге стране, ако претпоставимо да важи $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1$, тада на основу претходног важи и $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 0$. Добијамо да је $\alpha\beta = -\gamma(\alpha + \beta) = \gamma^2$. Следи

$$\alpha\overline{\alpha}\beta\overline{\beta}\gamma\overline{\gamma} = (\alpha\beta)\overline{(\alpha\beta)}|\gamma|^2 = \gamma^2\overline{\gamma^2}|\gamma|^2 = |\gamma|^6.$$

На сличан начин, налазимо да важи $\alpha\overline{\alpha}\beta\overline{\beta}\gamma\overline{\gamma} = |\alpha|^6$ и $\alpha\overline{\alpha}\beta\overline{\beta}\gamma\overline{\gamma} = |\beta|^6$. Коначно, имамо да је $|\alpha|^6 = |\beta|^6 = |\gamma|^6$, односно $|\alpha| = |\beta| = |\gamma|$, што повлачи да је $\Delta\, ABC$ једнакостраничан. Тиме је задатак завршен. □

Задатак 1.5 Нека је $n \in \mathbb{N}$ и $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$, при чему важи $|z_1| = \ldots = |z_n| = 1$ и нека је

$$z = \left(\sum_{j=1}^{n} z_j\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{z_j}\right).$$

Доказати да важи $0 \leq z \leq n^2$.

Решење. Уочимо да важи $1 = |z_j|^2 = z_j \cdot \overline{z_j}$, одакле је $\frac{1}{z_j} = \overline{z_j}$ за све $j = 1, \ldots, n$. Следи

$$z = \left(\sum_{j=1}^{n} z_j\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} \overline{z_j}\right) = \left(\sum_{j=1}^{n} z_j\right) \cdot \overline{\left(\sum_{j=1}^{n} z_j\right)} = \left|\sum_{j=1}^{n} z_j\right|^2 \geq 0.$$

Поред тога, важи

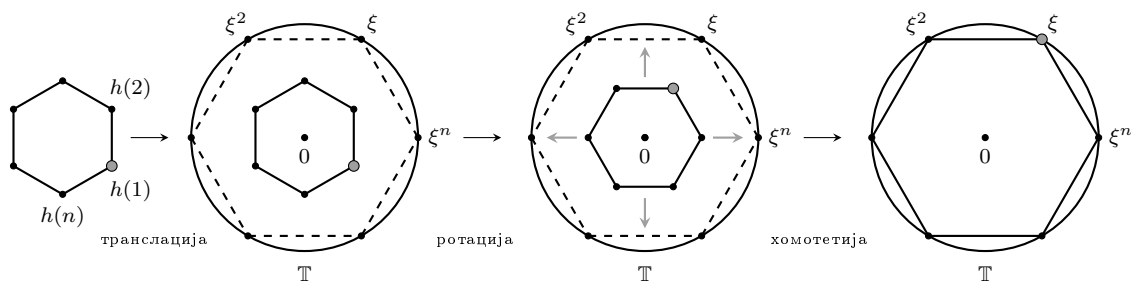
$$z = \left|\sum_{j=1}^{n} z_j\right|^2 \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |z_j|\right)^2 = n^2,$$

чиме је задатак завршен. □

Задатак 2.20 Нека је $n \geq 3$ природан број и нека су f и g полиноми са реалним коефицијентима, такви да тачке $(f(1), g(1)), (f(2), g(2)), \ldots, (f(n), g(n))$ представљају темена правилног n-тоугла у $\mathbb{R}^2$ поређана у позитивном смеру. Доказати да је

$$\max\{\deg f, \deg g\} \geq n - 1.$$

Решење. Уочимо полином $h = f + \mathrm{i}g$ у комплексној равни и нека је $d = \deg h$. Тада је $d = \max\{\deg f, \deg g\}$ и довољно је доказати да важи $d \geq n - 1$. Приметимо да тада тачке $h(1), h(2), \ldots, h(n)$ представљају темена правилног n-тоугла у комплексној равни $\mathbb{C}$ поређана у позитивном смеру. Означимо са $\xi = e^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{n}}$ примитиван n-ти корен јединице. Тачке $\xi, \xi^2, \ldots, \xi^n = 1$ представљају темена правилног n-тоугла уписаног у јединичну кружницу $\mathbb{T}$ поређана у позитивном смеру. Одговарајућом композицијом транслације, ротације и хомотетије у комплексној равни n-тоугао са теменима $h(1), h(2), \ldots, h(n)$ можемо пресликати на канонски n-тоугао са теменима $\xi, \xi^2, \ldots, \xi^n$, тако да се теме $h(j)$ првобитног n-тоугла преслика на теме ξ^j канонског n-тоугла, за све $j = 1, 2, \ldots, n$ (видети слику испод).



Слика уз Задатак 2.20.

Према томе, постоји линеарно пресликавање у комплексној равни које n-тоугао са теменима $h(1), h(2), \ldots, h(n)$ пресликава на канонски n-тоугао са теменима $\xi, \xi^2, \ldots, \xi^n$, при чему се теме $h(j)$ првобитног n-тоугла пресликава на теме ξ^j канонског n-тоугла, за све $j = 1, 2, \ldots, n$. Дакле, постоје комплексни бројеви $a \in \mathbb{C}^\times$ и $b \in \mathbb{C}$, такви да важи

$$ah(j) + b = \xi^j,$$

за све $j = 1, 2, \ldots, n$. Уочимо полином $p(z) = ah(z) + b$ у комплексној равни. Тада је $\deg p = \deg h = d$ и важи $p(j) = \xi^j$ за све $j = 1, 2, \ldots, n$. Коначно, уочимо полином

$$q(z) = p(z + 1) - \xi p(z).$$

Како је полином p степена d можемо га записати у облику $p(z) = c_d z^d + \ldots + c_1 z + c_0$, за неке комплексне бројеве $c_0, c_1, \ldots, c_d$, при чему је $c_d \neq 0$. Тада је

$$q(z) = c_d(z + 1)^d + \ldots + c_1(z + 1) + c_0 - \xi\left(c_d z^d + \ldots + c_1 z + c_0\right) = c_d(1 - \xi)z^d + \ldots,$$

што значи да је $\deg q = d$, јер је $c_d(1 - \xi) \neq 0$. Са друге стране, важи

$$q(j) = p(j + 1) - \xi p(j) = \xi^{j+1} - \xi \cdot \xi^j = 0,$$

за све $j = 1, 2, \ldots, n - 1$. Следи да полином q има бар $n - 1$ нулу у комплексној равни, одакле закључујемо да важи $d \geq n - 1$. Тиме је доказ завршен. $\square$

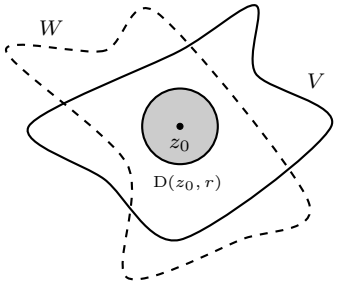
На основу претходног важи

$$\operatorname{Re} f = \frac{f + \overline{f}}{2} \in \mathcal{H}(\Omega) \quad \text{и} \quad \operatorname{Im}(\operatorname{Re} f) = 0 \ \text{ у } \ \Omega.$$

Дакле, холоморфна функција $\operatorname{Re} f$ има константан имагинаран део у области Ω. Применом Задатка 3.3 следи да је $\operatorname{Re} f$ константна функција. Поновном применом Задатка 3.3 на функцију f (која сада има константан реалан део) добијамо да је и функција f константна у области Ω, што је и требало доказати. $\diamondsuit$

Задатак 3.5 Нека је функција f холоморфна у тачки $z_0 \in \mathbb{C}$. Доказати да је функција $g = \operatorname{Re} f$ холоморфна у тачки z_0 ако и само ако је функција f константна у некој околини тачке z_0.

Решење. Најпре, претпоставимо да је функција f константна у некој околини тачке z_0. Тада постоји отворен скуп U који садржи тачку z_0, такав да је f константна функција у U. Следи да је и функција $g = \operatorname{Re} f$ константна у околини U. Самим тим, g је и диференцијабилна функција у тој околини. Дакле, функција g је холоморфна у тачки z_0. Са друге стране, у наставку претпоставимо да је функција g холоморфна у тачки z_0. Тада постоји отворен скуп V који садржи тачку z_0, такав да је функција f диференцијабилна у V. Слично, постоји и отворен скуп W који садржи тачку z_0, такав да је функција $g = \operatorname{Re} f$ диференцијабилна у W. Важи $z_0 \in V \cap W$ и како је $V \cap W$ отворен скуп, то постоји $r > 0$, тако да је $\mathrm{D}(z_0, r) \subset V \cap W$, где је $\mathrm{D}(z_0, r)$ отворен диск са центром у z_0 полупречника r. Добијамо



Слика уз Задатак 3.5.

$$g \in \mathcal{H}\left(\mathrm{D}(z_0, r)\right) \quad \text{и} \quad \operatorname{Im} g = \operatorname{Im}(\operatorname{Re} f) = 0.$$

Применом Задатка 3.3 закључујемо да је $g = \operatorname{Re} f$ константна функција у диску $\mathrm{D}(z_0, r)$. Поновном применом Задатка 3.3 на функцију $f \in \mathcal{H}(\mathrm{D}(z_0, r))$, која има константан реалан део у диску $\mathrm{D}(z_0, r)$, налазимо да и функција f мора бити константна у диску $\mathrm{D}(z_0, r)$. Према томе, функција f је константна у некој околини тачке z_0 и тиме је задатак завршен. $\square$

Задатак 3.6 Нека је $f = u + \mathrm{i}v$ холоморфна функција у области Ω у комплексној равни, при чему важи:

(а) Функција $e^u \cos v$ је константна у области Ω;

(б) Функција $u^2 - v$ је константна у области Ω.

Доказати да је функција f константна у области Ω.

Решење. (а) Функција e^f је холоморфна у области Ω, као композиција таквих. Приметимо да важи

$$\operatorname{Re}\left(e^f\right) = \operatorname{Re}\left(e^u(\cos v + \mathrm{i} \sin v)\right) = e^u \cos v.$$

Следи да је функција $\operatorname{Re}\left(e^f\right)$ константна у Ω, тако да на основу Задатка 3.3 налазимо да је и функција e^f константна у области Ω. Тада је

$$0 = \left(e^f\right)' = e^f \cdot f' \ \text{ у } \ \Omega,$$

Теорема 4.3 *Нека је K права или кружница у комплексној равни и $w = \phi(z)$ билинеарно пресликавање. Тада су тачке z и z^* симетричне у односу на K ако и само ако су тачке $\phi(z)$ и $\phi(z^*)$ симетричне у односу на $\phi(K)$.*

Задатак 4.2 Одредити слику јединичне кружнице $\mathbb{T}$ и полудиска

$$P = \{z \in \mathbb{D} : \operatorname{Re} z > 0\},$$

при билинеарном пресликавању

$$w = \phi(z) = \frac{z}{1-z}.$$

Поред тога, доказати да је

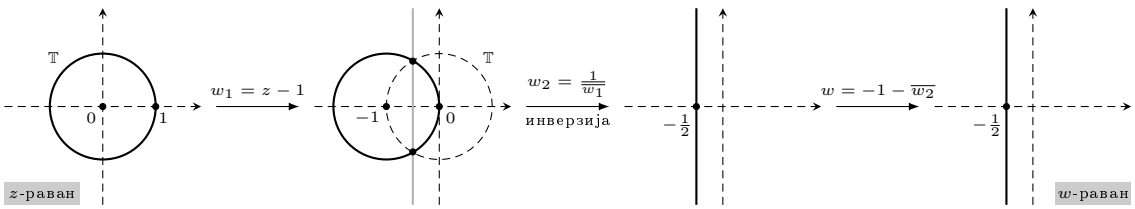
$$\operatorname{Re} \frac{z}{1-z} > -\frac{1}{2},$$

за све $z \in \mathbb{D}$.

Решење. Важи

$$w = \phi(z) = \frac{z}{1-z} = \frac{-(1-z)+1}{1-z} = -1 + (-1) \cdot \overline{\left(\frac{1}{\overline{z-1}}\right)}.$$

Користећи претходно добијену декомпозицију билинеарног пресликавања $w = \phi(z)$ одређујемо слику $\phi(\mathbb{T})$.



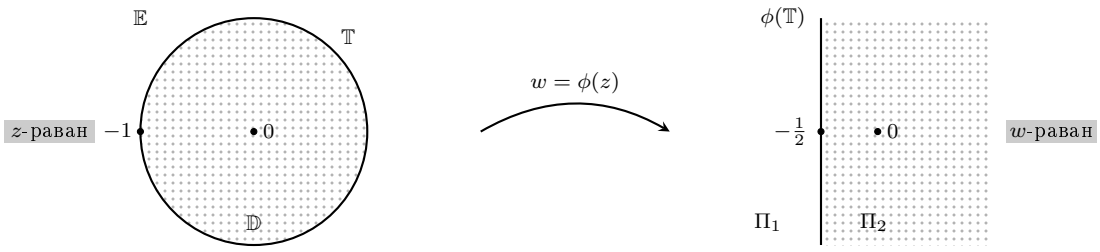
Прва слика уз Задатак 4.2.

Наиме, прво транслацијом $w_1 = z - 1$ из z-равни прелазимо у w_1-раван, при чему се кружница $|z| = 1$ слика на кружницу $|w_1 + 1| = 1$. Затим се добијена кружница $|w_1 + 1| = 1$ слика инверзијом $w_2 = 1/\overline{w_1}$ која заправо представља инверзију у односу на јединичну кружницу $\mathbb{T}$ у w_1-равни. Будући да кружница $|w_1 + 1| = 1$ садржи тачку 0 која представља центар кружнице $\mathbb{T}$ у односу на коју се врши инверзија, њена инверзна слика мора бити права и то она која пролази кроз две пресечне тачке подударних кружница $|w_1 + 1| = 1$ и $\mathbb{T}$. Дакле, одговарајућа слика у w_2-равни је права $\operatorname{Re} w_2 = -1/2$. На крају, последња операција из декомпозиције билинеарног пресликавања $w = \phi(z)$ јесте дата са $w = -1 - \overline{w_2}$, којом се права $\operatorname{Re} w_2 = -1/2$ слика на исту ту праву $\operatorname{Re} w = -1/2$ из w-равни. На основу претходног добијамо

$$\phi(\mathbb{T}) = \left\{ w \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} w = -\frac{1}{2} \right\}.$$

Са друге стране, приметимо да јединична кружница $\mathbb{T}$ дели z-раван на јединични диск $\mathbb{D}$ и на област $\mathbb{E} = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$. Такође, права $\phi(\mathbb{T})$ дели w-раван на две полуравни:

$$\Pi_1 = \left\{ w \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} w < -\frac{1}{2} \right\} \quad \text{и} \quad \Pi_2 = \left\{ w \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} w > -\frac{1}{2} \right\}.$$



Друга слика уз Задатак 4.2.

Имајући у виду да је скуп $\phi(\mathbb{D})$ повезан, као непрекидна слика таквог и да је билинеарно пресликавање $w = \phi(z)$ бијекција, долазимо до закључка да важи

$$\phi(\mathbb{D}) = \Pi_1 \quad \text{или} \quad \phi(\mathbb{D}) = \Pi_2.$$

Међутим, како важи $\phi(0) = 0 \in \Pi_2$, при чему $0 \in \mathbb{D}$, то мора бити

$$\phi(\mathbb{D}) = \Pi_2. \tag{4.2}$$

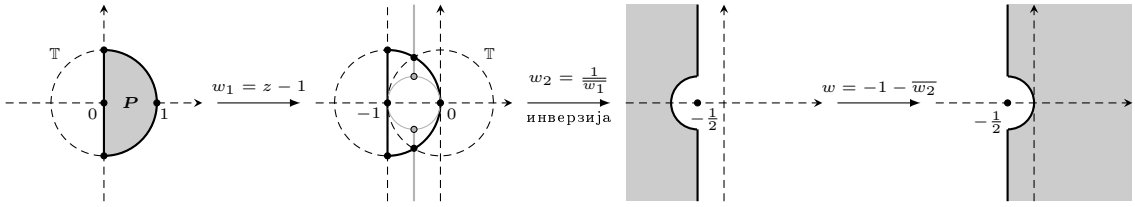
На основу (4.2) следи да за све $z \in \mathbb{D}$ важи

$$\phi(z) \in \Pi_2,$$

одакле је

$$\operatorname{Re} \frac{z}{1-z} = \operatorname{Re} \phi(z) > -\frac{1}{2},$$

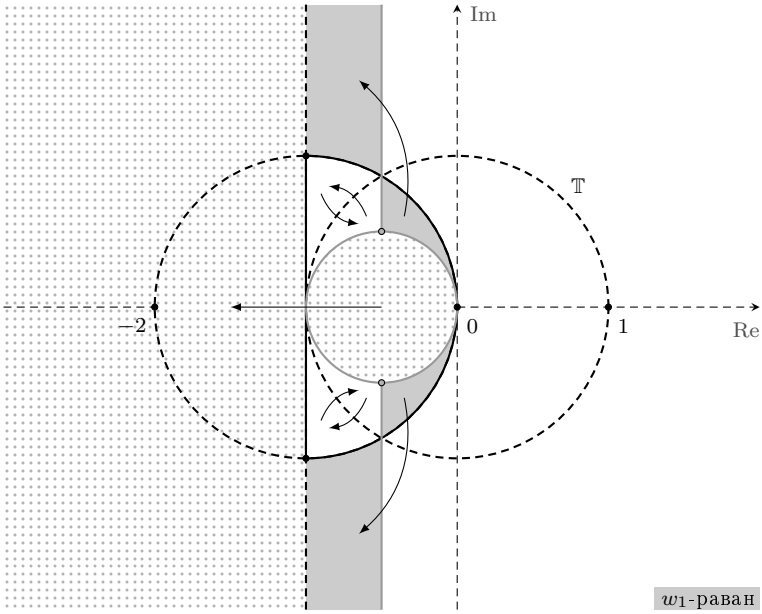
што је и требало показати. У наставку, слику $\phi(P)$ одређујемо као у првом делу задатка користећи наведену декомпозицију билинеарног пресликавања $w = \phi(z)$.



Трећа слика уз Задатак 4.2.

Приметимо да се граница полудиска P састоји од линијског сегмента који је одређен правом $\operatorname{Re} z = 0$ и одговарајућег полукружног дела који је одређен јединичном кружницом $\mathbb{T}$. Већ смо описали дејство билинеарног пресликавања ϕ на кружницу $\mathbb{T}$. Што се тиче праве $\operatorname{Re} z = 0$, она се најпре транслацијом $w_1 = z - 1$ преводи на праву $\operatorname{Re} w_1 = -1$. Будући да права $\operatorname{Re} w_1 = -1$ не садржи тачку 0 која је центар инверзије у односу на кружницу $\mathbb{T}$ у w_1-равни, њена слика при тој инверзији јесте кружница која садржи центар инверзије, односно тачку 0. Осим тога, та кружница мора да садржи тачку -1 која је фиксна тачка инверзије у односу на $\mathbb{T}$, јер и права $\operatorname{Re} w_1 = -1$ садржи тачку -1. Коначно, та кружница јесте симетрична у односу на реалну осу, јер је права $\operatorname{Re} w_1 = -1$ таква. Стога, закључујемо да је слика праве $\operatorname{Re} w_1 = -1$ при инверзији $w_2 = 1/\overline{w_1}$ заправо кружница $|w_2 + 1/2| = 1/2$. На тај начин смо пресликали границе полудиска P, одакле се према начину на који инверзија дејствује директно налази слика полудиска P. Напоменимо да се

одговарајуће графичко објашњење може видети на наредној слици, где је показано како се поједини делови транслираног полудиска пресликавају при инверзији у односу на јединичну кружницу $\mathbb{T}$, при чему се исто осенчени делови пресликавају један на други у односу на поменуту инверзију.



Четврта слика уз Задатак 4.2.

Дакле, одговарајућа слика почетног полудиска у w_2-равни јесте представљена скупом тачака $w_2 \in \mathbb{C}$ за које важи $\operatorname{Re} w_2 < -1/2$ и $|w_2 + 1/2| > 1/2$. Након последњег пресликавања $w = -1 - \overline{w_2}$ тај скуп прелази у одговарајући скуп тачака из w-равни, односно у скуп тачака $w \in \mathbb{C}$ које задовољавају услове $\operatorname{Re} w > -1/2$ и $|w + 1/2| > 1/2$. Према томе, добијамо

$$\phi(P) = \left\{ w \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} w > -\frac{1}{2} \quad \text{и} \quad \left| w + \frac{1}{2} \right| > \frac{1}{2} \right\}.$$

Тиме је задатак у потпуности завршен. □

Задатак 4.3 Дато је билинеарно пресликавање $w = \phi(z)$, при чему важи

$$\phi(0) = 1, \;\; \phi(\mathrm{i}) = \infty \;\; \text{и} \;\; \phi(\infty) = 2.$$

(а) Одредити $\phi(\mathbb{D})$.

(б) Ако су z_1, z_2, z_3 и z_4 решења једначине

$$\phi(z)^4 = 1,$$

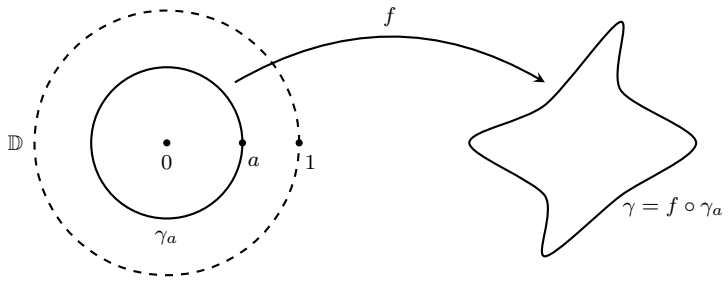
израчунати

$$\left(z_1^2 + 1\right) \cdot \left(z_2^2 + 1\right) \cdot \left(z_3^2 + 1\right) \cdot \left(z_4^2 + 1\right).$$

Решење. Будући да за дато билинеарно пресликавање $w = \phi(z)$ важи

$$0, \mathrm{i}, \infty \overset{\phi}{\longmapsto} 1, \infty, 2,$$

Задатак 6.5 Дата је холоморфна функција $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ и нека је $\gamma(t) = f(ae^{\mathrm{i}t})$ за све $t \in [0, 2\pi]$, при чему важи $0 < a < 1$. Доказати да је $\ell(\gamma) \geq 2\pi a|f'(0)|$.



Слика уз Задатак 6.5.

Решење. Нека је γ_a позитивно оријентисана кружница са центром у тачки 0 полупречника a, односно, нека је $\gamma_a(t) = ae^{\mathrm{i}t}$ за све $t \in [0, 2\pi]$. Тада важи

$$\begin{aligned}
\ell(\gamma) &= \int_\gamma |\mathrm{d}z| = \int_0^{2\pi} |\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \left|f'(ae^{\mathrm{i}t})ai e^{\mathrm{i}t}\right| \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \left|f'(\gamma_a(t))\right| \cdot \left|\gamma_a'(t)\right| \mathrm{d}t \\
&= \int_{\gamma_a} |f'(z)|\,|\mathrm{d}z|.
\end{aligned}$$

Затим, користећи Кошијеву интегралну формулу, али примењену на функцију f' и Основну интегралну неједнакост, добијамо

$$|f'(0)| = \left|\frac{0!}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\gamma_a} \frac{f'(z)}{z}\,\mathrm{d}z\right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_a} \frac{|f'(z)|}{|z|}\,|\mathrm{d}z| = \frac{1}{2\pi a} \int_{\gamma_a} |f'(z)|\,|\mathrm{d}z| = \frac{1}{2\pi a} \cdot \ell(\gamma),$$

односно, важи $2\pi a|f'(0)| \leq \ell(\gamma)$. □

Задатак 6.6 Нека је $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ цела функција, при чему важи $f(0) = 3$ и $f'(0) = 1$. Израчунати

$$\int_0^{2\pi} f\left(e^{\mathrm{i}x}\right) \cos^2(x/2)\,\mathrm{d}x.$$

Решење. Означимо са I претходни интеграл. Приметимо да важи

$$I = \int_0^{2\pi} f\left(e^{\mathrm{i}x}\right) \frac{1 + \cos x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} f\left(e^{\mathrm{i}x}\right) \left(1 + \frac{e^{\mathrm{i}x} + e^{-\mathrm{i}x}}{2}\right) \mathrm{d}x.$$

Увођењем смене $z = e^{\mathrm{i}x}$, при чему важи $\mathrm{d}z = \mathrm{i}e^{\mathrm{i}x}\mathrm{d}x = \mathrm{i}z\mathrm{d}x$ и имајући у виду да пресликавање $x \mapsto e^{\mathrm{i}x}$ интервал $[0, 2\pi]$ слика на јединичну кружницу са центром у тачки 0, добијамо

$$I = \frac{1}{2} \int_\gamma f(z) \left(1 + \frac{z + 1/z}{2}\right) \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z} = \frac{1}{4\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(z)}{z} \left(2 + z + \frac{1}{z}\right) \mathrm{d}z,$$

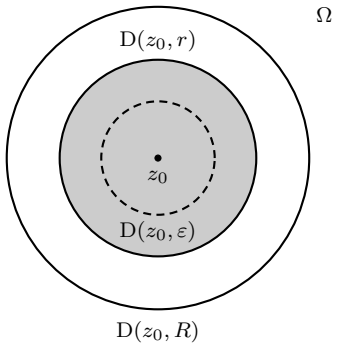
где је γ позитивно оријентисана кружница са центром у тачки 0 полупречника 1. Према томе, важи

$$I = \frac{1}{2\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(z)}{z}\,\mathrm{d}z + \frac{1}{4\mathrm{i}} \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z + \frac{1}{4\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(z)}{z^2}\,\mathrm{d}z.$$

Задатак 7.12 Нека је f холоморфна функција у области $\Omega \subset \mathbb{C}$ и $f'(z_0) \neq 0$ за неко $z_0 \in \Omega$. Доказати да постоји $r > 0$, тако да је $\overline{\mathrm{D}}(z_0, r) \subset \Omega$ и да за све $0 < \varepsilon < r$ важи

$$\int_{\partial \mathrm{D}(z_0,\varepsilon)} \frac{1}{f(z) - f(z_0)} \, \mathrm{d}z = \frac{2\pi \mathrm{i}}{f'(z_0)}.$$

Решење. Постоји $R > 0$ тако да је $\mathrm{D}(z_0, R) \subset \Omega$. Како важи $f'(z_0) \neq 0$, то је функција f неконстантна. Следи да је $f - f(z_0)$ холоморфна и неконстантна функција која се нулира у тачки $z_0 \in \Omega$. Будући да су нуле холоморфне и некостантне функције изоловане, то постоји $r \in (0, R)$, тако да функција $f - f(z_0)$ нема нула у пробушеном затвореном диску $\overline{\mathrm{D}}^{\times}(z_0, r)$. Покажимо да такво r испуњава тражене услове. Најпре, приметимо да важи $\overline{\mathrm{D}}(z_0, r) \subset \mathrm{D}(z_0, R) \subset \Omega$. Затим, уочимо функцију



Слика уз Задатак 7.12.

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}, & \text{ако је } z \in \mathrm{D}^{\times}(z_0, r) \\ f'(z_0), & \text{ако је } z = z_0 \end{cases}.$$

Према Задатку 7.1 функција g је холоморфна у диску $\mathrm{D}(z_0, r)$ и поред тога, на основу претходних разматрања, она нема нула у том диску. Стога је и функција $h = 1/g$ холоморфна у диску $\mathrm{D}(z_0, r)$. Нека је $0 < \varepsilon < r$ произвољно. Применом Кошијеве интегралне формуле налазимо

$$\int_{\partial \mathrm{D}(z_0,\varepsilon)} \frac{h(z)}{z - z_0} \, \mathrm{d}z = 2\pi \mathrm{i} h(z_0). \tag{7.5}$$

Осим тога, важи

$$h(z_0) = \frac{1}{g(z_0)} = \frac{1}{f'(z_0)}.$$

Такође је

$$\frac{h(z)}{z - z_0} = \frac{1}{g(z)} \cdot \frac{1}{z - z_0} = \frac{z - z_0}{f(z) - f(z_0)} \cdot \frac{1}{z - z_0} = \frac{1}{f(z) - f(z_0)},$$

за све $z \in \partial \mathrm{D}(z_0, \varepsilon)$. Заменом у (7.5) добијамо

$$\int_{\partial \mathrm{D}(z_0,\varepsilon)} \frac{1}{f(z) - f(z_0)} \, \mathrm{d}z = \frac{2\pi \mathrm{i}}{f'(z_0)},$$

чиме је задатак завршен. □

Задатак 7.13 Нека је $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ цела функција и $n \in \mathbb{N}$.

(а) Доказати да важи

$$f^{(n)}(0) = \frac{n!}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{-\mathrm{i}nt} \operatorname{Re} f\left(e^{\mathrm{i}t}\right) \mathrm{d}t.$$

(б) Ако је $f(0) = 1$ и $\operatorname{Re} f(z) > 0$ за све $z \in \mathbb{D}$, доказати да важи

$$\left| f^{(n)}(0) \right| \leq 2n!.$$

На крају закључујемо

$$\left|f^{(n)}(0)\right| \overset{(7.10)}{\leq} \frac{n!}{\pi}\int_0^{2\pi}\left|\operatorname{Re} f\left(e^{\mathrm{i}t}\right)\right|\mathrm{d}t \overset{(7.9)}{=} \frac{n!}{\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{Re} f\left(e^{\mathrm{i}t}\right)\mathrm{d}t \overset{(7.8)}{=} 2n!,$$

чиме је задатак комплетиран. □

• **Парсевалова формула.** Као последицу Тејлоровог развоја холоморфне функције у диску добијамо следеће тврђење које представља *Парсевалову формулу.*

Нека је $R > 0$ и $f : \mathrm{D}(0, R) \to \mathbb{C}$ холоморфна функција, при чему важи

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

за све $z \in \mathrm{D}(0, R)$. Тада је

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f\left(re^{\mathrm{i}\theta}\right)\right|^2\mathrm{d}\theta = \sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2 r^{2n},$$

за све $0 < r < R$.

Степени ред из претходног Тејлоровог развоја функције f у диску $\mathrm{D}(0, R)$ равномерно конвергира на компактним подскуповима тог диска. Самим тим, у разматрању које следи, дозвољена је промена редоследа интеграције и сумирања, односно важи

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f\left(re^{\mathrm{i}\theta}\right)\right|^2\mathrm{d}\theta &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(re^{\mathrm{i}\theta}\right)\cdot\overline{f\left(re^{\mathrm{i}\theta}\right)}\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{\mathrm{i}n\theta}\sum_{k=0}^{\infty}\overline{a_k} r^k e^{-\mathrm{i}k\theta}\,\mathrm{d}\theta \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} a_n\overline{a_k} r^{n+k}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{\mathrm{i}(n-k)\theta}\,\mathrm{d}\theta \\
&\overset{(5.4)}{=} \sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2 r^{2n},
\end{aligned}$$

што заправо представља тражену формулу.

Задатак 7.14 Нека је $k \in \mathbb{N}$, $M > 0$ и $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ цела функција, при чему важи

$$\int_0^{2\pi}\left|f\left(re^{\mathrm{i}\theta}\right)\right|^2\mathrm{d}\theta \leq Mr^{2k},$$

за све $0 < r < \infty$. Доказати да постоји константа $c \in \mathbb{C}$, тако да важи $f(z) = cz^k$ за све $z \in \mathbb{C}$.

Решење. Означимо са

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad z \in \mathbb{C},$$

8

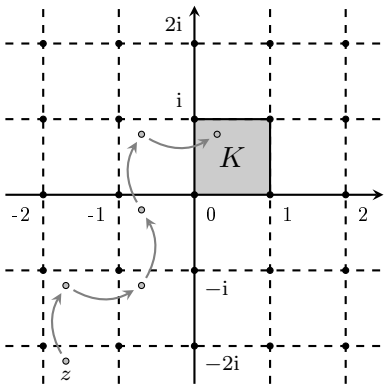
Лиувилова теорема и последице

Уколико је функција f холоморфна и неконстантна у комплексној равни, од интереса је испитати величину њене слике, односно скупа $f(\mathbb{C})$. Испоставља се да под претходно наведеним условима, слика $f(\mathbb{C})$ не може бити ограничен скуп у комплексној равни. Поред тога, може се показати да је слика целе и неконстантне функције густ скуп у комплексној равни.

Теорема 8.1 (Лиувилова теорема) *Нека је $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ цела и ограничена функција. Тада је f константна функција.*

Задатак 8.1 Нека је f цела функција и $f(z) = f(z+1) = f(z+\mathrm{i})$ за све $z \in \mathbb{C}$. Доказати да је f константна функција.

Решење. Уочимо квадрат $K = [0,1] \times [0,1]$ у комплексној равни $\mathbb{C}$. Функција $|f|$ је непрекидна у комплексној равни и на компакту K достиже свој максимум, односно, нека је $M = \max\{|f(z)| : z \in K\}$. Такође, како је према горе наведеном услову задатка $f(z) = f(z+1) = f(z+\mathrm{i})$ за све $z \in \mathbb{C}$, то индуктивно следи $f(z) = f(z+m+n\mathrm{i})$ за све $z \in \mathbb{C}$ и све $m, n \in \mathbb{Z}$. Нека је сада $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ произвољно одабран комплексан број. Приметимо да тада заправо важи $f(x+\mathrm{i}y) = f(x+\mathrm{i}y-\lfloor x\rfloor-\mathrm{i}\lfloor y\rfloor) = f(x-\lfloor x\rfloor+\mathrm{i}\,(y-\lfloor y\rfloor))$, јер је $-\lfloor x\rfloor \in \mathbb{Z}$ и $-\lfloor y\rfloor \in \mathbb{Z}$ (при чему је са $\lfloor\cdot\rfloor$ означена функција узимања целог дела). Осим тога, како важи $x - \lfloor x\rfloor \in [0,1]$ и $y - \lfloor y\rfloor \in [0,1]$, то добијамо да је $x - \lfloor x\rfloor + \mathrm{i}\,(y - \lfloor y\rfloor) \in K$. На основу претходног, налазимо да важи $f(z) = f(x - \lfloor x\rfloor + \mathrm{i}\,(y - \lfloor y\rfloor)) \leq M$. Дакле, за све тачке z из комплексне равни $\mathbb{C}$, важи $|f(z)| \leq M$. Према томе, применом Лиувилове теореме можемо закључити да је функција f константна. $\square$



Слика уз Задатак 8.1.

Задатак 8.2 Нека је $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ цела функција, таква да је $|f(z)| \leq c|z|^\lambda + d$ за све $z \in \mathbb{C}$, где су λ, c и d ненегативне константе. Доказати да је f полином степена не већег од $\lfloor\lambda\rfloor$.

Решење. Како је функција f холоморфна у комплексној равни, може се представити у облику

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \;\; z \in \mathbb{C},$$

Задатак 9.19 Нека је $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ цела функција и $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{T}$. Доказати да функција f нема нула у комплексној равни $\mathbb{C}$.

Решење. На основу Напомене 9.2 функција $f^*(z) = \overline{f(\overline{z})}$, $z \in \mathbb{C}$ је цела. За све $x \in \mathbb{R}$, важи $f(x) \in \mathbb{T}$ и самим тим је

$$1 = |f(x)|^2 = f(x) \cdot \overline{f(x)}.$$

Функција $g = f \cdot f^*$ је цела функција као производ таквих функција. Поред тога, на основу претходног важи

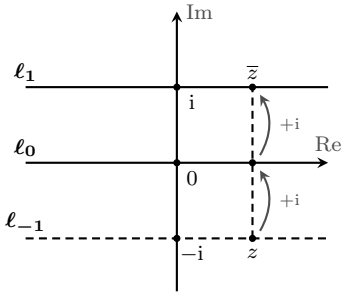
$$g(x) = f(x) \cdot f^*(x) = f(x) \cdot \overline{f(\overline{x})} = f(x) \cdot \overline{f(x)} = 1,$$

за све $x \in \mathbb{R}$. Према томе, $g = 1$ на $\mathbb{R}$. Применом Теореме јединости добијамо да је $g = 1$ у $\mathbb{C}$, односно $g(z) = f(z) \cdot f^*(z) = 1$ за све $z \in \mathbb{C}$. Следи $f(z) \neq 0$ за све $z \in \mathbb{C}$, што значи да функција f нема нула у комплексној равни. □

Задатак 9.20 Нека је $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ цела функција,

$$\ell_0 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = 0\} \text{ и } \ell_1 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = 1\},$$

при чему важи $f(\ell_0 \cup \ell_1) \subset \ell_0$. Доказати да је $f(z + 2\mathrm{i}) = f(z)$ за све $z \in \mathbb{C}$.



Слика уз Задатак 9.20.

Решење. Функција $f^*(z) = \overline{f(\overline{z})}$, $z \in \mathbb{C}$ је цела функција (Напомена 9.2). За $z \in \ell_0$, важи $\overline{z} = z$ и $\overline{f(z)} = f(z)$, јер је $f(\ell_0) \subset \ell_0$, тако да је $f = f^*$ на ℓ_0. Теорема јединости повлачи да је

$$f = f^* \text{ у } \mathbb{C}.$$

Са друге стране, нека је $h(z) = f(z + 2\mathrm{i}) - f(z)$ за све $z \in \mathbb{C}$. Тада је h цела функција. Осим тога, означимо

$$\ell_{-1} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = -1\}.$$

Нека је $z \in \ell_{-1}$ произвољно одабрана тачка. Приметимо да тада важи $\overline{z} = z + 2\mathrm{i} \in \ell_1$. Уколико искористимо претпоставку $f(\ell_1) \subset \ell_0$, добијамо да је

$$h(z) = f(\overline{z}) - f(z) = \overline{f(\overline{z})} - f(z) = f^*(z) - f(z) = 0.$$

Дакле, важи

$$h = 0 \text{ на правој } \ell_{-1},$$

односно, на основу Теореме јединости, следи

$$h = 0 \text{ у } \mathbb{C}.$$

Самим тим, за све $z \in \mathbb{C}$ важи $f(z + 2\mathrm{i}) = f(z)$ и тиме је задатак завршен. □

Задатак 10.19 Нека је $f : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}$ непрекидна функција, која је холоморфна у јединичном диску $\mathbb{D}$, при чему важи $|f(z)| \leq M$ за све $z \in \overline{\mathbb{D}}$ и $|f(z)| \leq m$ за све $z \in L$, где је

$$L = \left\{ z \in \overline{\mathbb{D}} : \operatorname{Re} z = -\frac{1}{2} \right\}.$$

Доказати да је

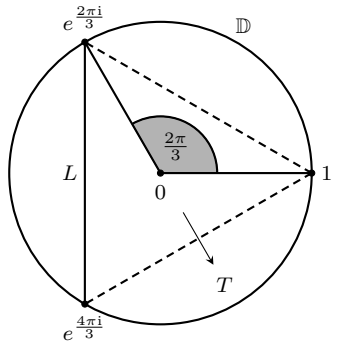
$$|f(0)| \leq \sqrt[3]{mM^2}.$$

Решење. Означимо са T једнакостраничан троугао са теменима 1, $e^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{3}}$ и $e^{\frac{4\pi \mathrm{i}}{3}}$. Приметимо да тада линијски сегмент L представља једну од страница троугла T. Осим тога, за произвољно $z \in \partial T$ тачке

$$z, ze^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{3}}, ze^{\frac{4\pi \mathrm{i}}{3}},$$

обиђу сваку од страница троугла T. Самим тим, уочимо функцију

$$g(z) = f(z) \cdot f\left(ze^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{3}}\right) \cdot f\left(ze^{\frac{4\pi \mathrm{i}}{3}}\right),$$



Слика уз Задатак 10.19.

где је $z \in \overline{\mathbb{D}}$. Функција g је холоморфна у јединичном диску $\mathbb{D}$ и непрекидна у његовом затворењу. Поред тога, на основу претходних разматрања, за све $z \in \partial T$ важи $|g(z)| \leq m \cdot M \cdot M = mM^2$. Користећи Принцип максимума добијамо да важи

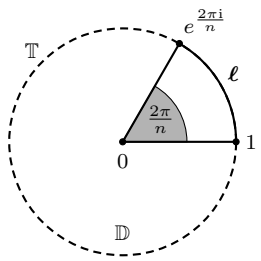
$$|f(0)|^3 = |g(0)| \leq \max_{\overline{T}} |g| = \max_{\partial T} |g| \leq mM^2,$$

одакле директно следи тражени закључак. □

Задатак 10.20 Нека је $n \in \mathbb{N}$ и $f : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}$ непрекидна функција, која је холоморфна у јединичном диску $\mathbb{D}$, при чему важи $f = 1$ на луку

$$\ell = \left\{ e^{\mathrm{i}\theta} : 0 \leq \theta \leq \frac{2\pi}{n} \right\},$$

јединичне кружнице $\mathbb{T}$. Доказати да је $f = 1$ у $\overline{\mathbb{D}}$.



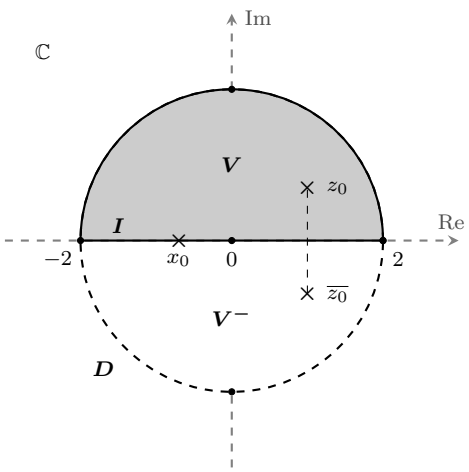
Слика уз Задатак 10.20.

Решење. Нека је $g(z) = f(z) - 1$ за све $z \in \overline{\mathbb{D}}$. Функција g је холоморфна у јединичном диску $\mathbb{D}$ и непрекидна у његовом затворењу. Такође, важи $g = 0$ на луку ℓ. Затим, означимо

$$h(z) = g(z) \cdot g\left(ze^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{n}}\right) \cdot \ldots \cdot g\left(ze^{\frac{2\pi(n-1)\mathrm{i}}{n}}\right),$$

где је $z \in \overline{\mathbb{D}}$. Наравно, функција h је холоморфна у јединичном диску $\mathbb{D}$ и непрекидна у његовом затворењу. За произвољно $z \in \mathbb{T}$ нека од тачака $z, ze^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{n}}, \ldots, ze^{\frac{2\pi(n-1)\mathrm{i}}{n}}$ припада луку ℓ, што повлачи $h(z) = 0$. Дакле, добијамо да важи $h = 0$ на јединичној кружници $\mathbb{T}$. У наставку, директном применом Принципа максимума налазимо да је

$$\max_{\overline{\mathbb{D}}} |h| = \max_{\mathbb{T}} |h| = 0,$$



Слика уз Задатак 13.11.

Решење. Нека је $f(z) = z^7$ и $g(z) = e^z$ за све $z \in \mathbb{C}$. Број решења једначине $z^7 + e^z = 0$ у полудиску V једнак је заправо броју нула функције $h = f + g$ у том полудиску и означимо тај број са m. Поред тога, нека је $I = (-2, 2)$ и

$$V^- = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2, \operatorname{Im} z < 0\}.$$

Такође, означимо са n број нула функције h на интервалу I. Даље, приметимо (видети и Задатак 2.1) да важи

$$\overline{h(z)} = \overline{z^7} + \overline{e^z} = \overline{z}^7 + e^{\overline{z}} = h(\overline{z}).$$

Специјално, комплексан број z_0 је нула функције h ако и само ако је $\overline{z_0}$ нула те функције. На основу претходног и чињенице да су полудискови V и V^- симетрични у односу на реалну осу, следи да функција h има исти број нула у тим полудисковима. Дакле, функција f има такође m нула у полудиску V^-. Нека је $D = \mathrm{D}(0, 2)$ и како важи

$$D = V \cup I \cup V^-,$$

при чему су скупови V, I и V^- међусобно дисјунктни, то добијамо да функција h има $m + n + m = 2m + n$ нула у диску D. За $z \in \partial D$ важи

$$|g(z)| = |e^z| = e^{\operatorname{Re} z} \leq e^{|z|} = e^2 < 2^7 = |z^7| = |f(z)|.$$

Применом Рушеове теореме добијамо да функције f и $f + g = h$ имају исти број нула у диску D, односно функција h има 7 нула у том диску. Самим тим, важи $2m + n = 7$. Са друге стране, ако $x \in I$ налазимо

$$h'(x) = 7x^6 + e^x > 0,$$

што значи да је функција h строго растућа на интервалу I. Будући да важи

$$h(-2) = -2^7 + e^{-2} < 0 \text{ и } h(2) = 2^7 + e^2 > 0,$$

следи да функција h има тачно једну нулу x_0 на интервалу I. Према томе, добијамо да је $n = 1$. Коначно, важи

$$2m + n = 2m + 1 = 7,$$

одакле је $m = 3$. Стога, једначина $z^7 + e^z = 0$ има тачно 3 решења у полудиску V. □

Напомена 13.2 Приметимо да у Задатку 13.11 није могућа директна примена Рушеове теореме на полудиск V и функције f и g. Наиме, важи

$$\partial V = (\partial V \cap \partial D) \cup I,$$

при чему је $|g| < |f|$ на граници ∂D, а самим тим важи $|g| < |f|$ на $\partial V \cap \partial D$. Међутим, овај услов није испуњен на интервалу I, јер је

$$|g(0)| = 1 > 0 = |f(0)|,$$

при чему $0 \in I$. Према томе, не важи $|g| < |f|$ на целој граници ∂V. ♢

Како је $\sqrt[6]{3} < \sqrt[6]{4}$, то важи

$$z_k \in V_r \text{ ако и само ако } 0 < \frac{\pi + 2k\pi}{6} < \pi,$$

одакле следи да $z_k \in V_r$ само за $k = 0, 1, 2$. Коначно функција f има 3 нуле у полудиску V_r за све $r > \sqrt[6]{4}$. Стога и функција h има тачно 3 нуле у V_r за све $r > \sqrt[6]{4}$ и приметимо да сваки комплексан број $z \in \mathbb{H}$ припада неком полудсику V_r за неко довољно велико $r > \sqrt[6]{4}$ (заправо довољно је да важи $r > \max\{\sqrt[6]{4}, |z|\}$). На основу свега претходног следи да функција h има тачно 3 нуле у горњој полуравни $\mathbb{H}$. Тиме је задатак у потпуности завршен. □

• **Теорема о отвореном пресликавању.** Холоморфна и неконстантна функција отворене скупове у комплексној равни пресликава опет на отворене скупове. Наиме, важи следеће тврђење које представља *Теорему о отвореном пресликавању.*

> *Нека је f холоморфна и неконстантна функција у области $\Omega \subset \mathbb{C}$. Ако је $V \subset \Omega$ отворен скуп, тада је и $f(V)$ отворен скуп.*

Ако је V празан скуп тврђење директно следи. Зато у наставку претпоставимо да је $V \neq \emptyset$ и нека је $w_0 \in f(V)$ произвољно одабрана тачка. Тада је $w_0 = f(z_0)$ за неко $z_0 \in V$. Функција $g = f - w_0$ је холоморфна и неконстантна у области Ω, при чему важи $g(z_0) = 0$. Тада постоји $r > 0$, тако да важи $\overline{\mathrm{D}}(z_0, r) \subset V$, при чему функција g нема нула у пробушеном затвореном диску $\overline{\mathrm{D}}^{\times}(z_0, r)$ (у супротном би на основу Теореме јединости важило $g \equiv 0$, односно функција g би била константна, што је немогуће). Другим речима, нуле холоморфне и неконстантне функције су изоловане, о чему је већ било речи у одељку који претходи Задатку 7.12. Будући да непрекидна функција на компакту достиже минимум добијамо

$$\varepsilon = \min_{\partial \mathrm{D}(z_0, r)} |g| > 0.$$

Нека је $w \in \mathrm{D}(w_0, \varepsilon)$ произвољна тачка. Тада за све $z \in \partial \mathrm{D}(z_0, r)$ важи

$$|w_0 - w| < \varepsilon \leq |g(z)|.$$

Применом Рушеове теореме закључујемо да функције g и $g + w_0 - w = f - w$ имају исти број нула у диску $\mathrm{D}(z_0, r)$. Будући да функција g има нулу у диску $\mathrm{D}(z_0, r)$ (јер је $g(z_0) = 0$), то и функција $f - w$ има бар једну нулу у том диску. Самим тим, важи $w \in f(\mathrm{D}(z_0, r)) \subset f(V)$. Према томе, добијамо $\mathrm{D}(w_0, \varepsilon) \subset f(V)$, што значи да је скуп $f(V)$ отворен. Тиме је доказана Теорема о отвореном пресликавању, између осталог, преко Рушеове теореме. Директна последица Теореме о отвореном пресликавању јесте *Принцип очувања области.*

> *Нека је f холоморфна и неконстантна функција у области $\Omega \subset \mathbb{C}$. Тада је и скуп $f(\Omega)$ област у комплексној равни.*

Заправо, будући да је Ω област, то је Ω непразан, повезан и отворен скуп у комплексној равни. Јасно је да је $f(\Omega)$ непразан скуп. Такође, он је повезан као непрекидна слика таквог скупа. На крају, отвореност скупа $f(\Omega)$ следи на основу Теореме о отвореном пресликавању. Дакле, $f(\Omega)$ је такође област у комплексној равни.

Задатак 13.17 Нека је f холоморфна функција у области Ω, при чему је бар једна од функција $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f$, $|f|$ или $\arg f$ константна. Доказати да је f константна функција.

Задатак 14.6 (Шварц-Пикова лема) Нека је $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ холоморфна функција. Доказати да важи

1° $\left|\dfrac{f(z_1) - f(z_2)}{1 - \overline{f(z_2)}f(z_1)}\right| \leq \left|\dfrac{z_1 - z_2}{1 - \overline{z_2}z_1}\right|$ за све $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$;

2° $\dfrac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leq \dfrac{1}{1 - |z|^2}$ за све $z \in \mathbb{D}$.

Осим тога, важи једнакост у 1° за неке $z_1 \neq z_2$ из диска $\mathbb{D}$ или важи једнакост у 2° за неко $z \in \mathbb{D}$ ако и само ако је $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$.

Решење. Нека је $z \in \mathbb{D}$ произвољно одабрана тачка и означимо $a = f(z)$. Поред тога, нека је

$$F = \varphi_a \circ f \circ \varphi_{-z}.$$

Тада је $F : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ холоморфна функција. Приметимо да је

$$F(0) = \varphi_a(f(\varphi_{-z}(0))) = \varphi_a(f(z)) = \varphi_a(a) = 0.$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{D} \arrow[r, "f"] & \mathbb{D} \arrow[d, "\varphi_a"] \\ \mathbb{D} \arrow[u, "\varphi_{-z}"] \arrow[r, dashed, "F"] & \mathbb{D} \end{tikzcd}$$

Дијаграм уз Задатак 14.6.

Применом Шварцове леме на функцију F налазимо да важи $|F'(0)| \leq 1$ и $|F(\zeta)| \leq |\zeta|$ за све $\zeta \in \mathbb{D}$. Следи

$$1 \geq \left|F'(0)\right| = \left|\varphi_a'(f(\varphi_{-z}(0))) \cdot f'(\varphi_{-z}(0)) \cdot \varphi_{-z}'(0)\right| = \frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \cdot \left(1 - |z|^2\right),$$

што повлачи 2°. Такође је

$$|\varphi_a(f(\varphi_{-z}(\zeta)))| \leq |\zeta|, \tag{14.4}$$

за све $\zeta \in \mathbb{D}$. Ако су z_1 и z_2 произвољно одабране тачке из јединичног диска $\mathbb{D}$, тада заменом $\zeta = \varphi_{z_2}(z_1)$ и $z = z_2$ у (14.4) добијамо

$$\left|\varphi_{f(z_2)}(f(z_1))\right| \leq |\varphi_{z_2}(z_1)|.$$

На тај начин смо показали 1°. Важи једнакост у 1° за неке $z_1 \neq z_2$ из диска $\mathbb{D}$ или важи једнакост у 2° за неко $z \in \mathbb{D}$ ако и само ако важи једнакост у оквиру Шварцове леме примењене на функцију F, односно, ако и само ако је

$$F = e^{\mathrm{i}\alpha}\mathbb{1}_{\mathbb{D}},$$

за неко $\alpha \in \mathbb{R}$, што значи

$$\varphi_a \circ f \circ \varphi_{-z} = e^{\mathrm{i}\alpha}\mathbb{1}_{\mathbb{D}}.$$

Директно се проверава да је претходна једнакост заправо еквивалентна са чињеницом да $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. Наиме, ако важи претходна једнакост тада је тривијално

$$f = \varphi_{-a} \circ \left(e^{\mathrm{i}\alpha}\mathbb{1}_{\mathbb{D}}\right) \circ \varphi_z \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D}).$$

Обрнуто, ако важи $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$, тада је $\varphi_a \circ f \circ \varphi_{-z}$ такође, аутоморфизам јединичног диска $\mathbb{D}$ који тачку 0 пресликава опет у тачку 0, одакле на основу Задатка 14.5, следи да он мора бити ротација, односно

$$\varphi_a \circ f \circ \varphi_{-z} = e^{\mathrm{i}\alpha}\mathbb{1}_{\mathbb{D}},$$

за неко $\alpha \in \mathbb{R}$. Тиме је задатак комплетиран. □

Задатак 14.13 Нека је $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ холоморфна функција и $f(a) = 0$ за неко $a \in \mathbb{D}$. Доказати да важи

$$f(z) = g(z)\varphi_a(z), \quad z \in \mathbb{D},$$

где је $g : \mathbb{D} \to \overline{\mathbb{D}}$ холоморфна функција.

Решење. Према Задатку 7.1 функција

$$h(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}, & \text{ако је } z \in \mathbb{D} \setminus \{a\} \\ f'(a), & \text{ако је } z = a \end{cases},$$

јесте холоморфна у јединичном диску $\mathbb{D}$. Поред тога, важи

$$f(z) = (z-a)h(z),$$

за све $z \in \mathbb{D}$. Са друге стране, функција

$$g(z) = (1 - \overline{a}z)\, h(z), \quad z \in \mathbb{D},$$

јесте такође, холоморфна у диску $\mathbb{D}$ и важи

$$f(z) = (z-a)h(z) = (1-\overline{a}z)\, h(z)\varphi_a(z) = g(z)\varphi_a(z),$$

за све $z \in \mathbb{D}$. Применом Шварц-Пикове леме добијамо

$$|g(a)| = \left(1 - |a|^2\right)\left|f'(a)\right| = \left(1 - |a|^2\right) \cdot \frac{|f'(a)|}{1 - |f(a)|^2} \leq 1.$$

Поновном применом Шварц-Пикове леме добијамо да за све $z \in \mathbb{D} \setminus \{a\}$ важи

$$|g(z)| = |1 - \overline{a}z| \cdot |h(z)| = \frac{1}{|\varphi_a(z)|} \cdot |f(z) - f(a)| = \frac{1}{|\varphi_a(z)|} \cdot \left| \frac{f(z) - f(a)}{1 - \overline{f(a)}f(z)} \right| \leq 1.$$

На основу претходног следи $g : \mathbb{D} \to \overline{\mathbb{D}}$, чиме је задатак комплетиран. □

Напомена 14.2 Тврђење претходног задатка остаје на снази и у случају холоморфне функције $f : \mathbb{D} \to \overline{\mathbb{D}}$ која задовољава услов $f(a) = 0$ за неко $a \in \mathbb{D}$. Наиме, уколико би важило $|f(z)| = 1$ за неко $z \in \mathbb{D}$, тада би на основу Принципа максимума функција f морала бити константна, што заједно са условом $f(a) = 0$, повлачи $f \equiv 0$. Следи $f(z) = 0$, што је у контрадикцији са претпоставком да је $|f(z)| = 1$. Дакле, мора бити $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, одакле на основу претходног задатка следи тражени закључак. ♢

Напомена 14.3 Нека је $n \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{D}$ и $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ холоморфна функција, при чему важи $f(a_j) = 0$ за све $j = 1, \ldots, n$. Вишеструком применом Задатка 14.13, односно Напомене 14.2, добијамо

$$f(z) = g(z) \prod_{j=1}^{n} \varphi_{a_j}(z), \quad z \in \mathbb{D},$$

где је $g : \mathbb{D} \to \overline{\mathbb{D}}$ холоморфна функција. Поред тога, није неопходно да сви a_j, где је $j = 1, \ldots, n$, буду међусобно различити. На пример, ако се a_i за неко $i \in \{1, \ldots, n\}$ јавља $k \in \mathbb{N}$ пута у низу $a_1, \ldots, a_n$ (што заправо имплицитно значи да је a_i нула реда бар k функције f), тада се у производу

$$\prod_{j=1}^{n} \varphi_{a_j},$$

јавља фактор $\varphi_{a_i}^k$. ♢

15

Разни задаци

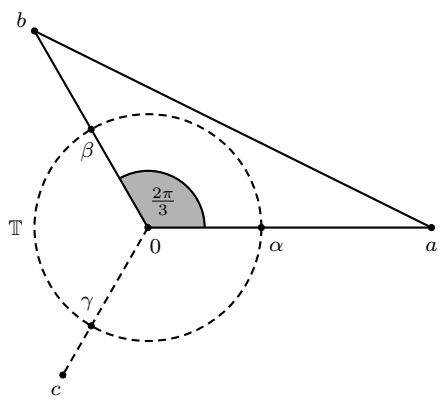
У разматрању задатака који следе неопходно је познавање основних ознака, појмова и тврђења, наведених у претходним поглављима. Поред тога, у наставку од користи може бити и комбиновање неких раније презентованих метода, односно различитих техника решавања.

Задатак 15.1 За комплексне бројеве a, b и c важи

$$a|bc| + b|ca| + c|ab| = 0.$$

Доказати да је

$$|(a-b)(b-c)(c-a)| \geq 3\sqrt{3}|abc|.$$



Слика уз Задатак 15.1.

Решење. Најпре, уколико је неки од комплексних бројева a, b и c једнак броју 0, тада тражена неједнакост тривијално следи. Зато, у наставку претпоставимо да важи $a, b, c \in \mathbb{C}^{\times}$. Осим тога, уведимо ознаке $\alpha = a/|a|$, $\beta = b/|b|$ и $\gamma = c/|c|$. Тада тачке α, β и γ припадају кружници $\mathbb{T}$ и важи

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{a|bc| + b|ca| + c|ab|}{|abc|} = 0.$$

На основу Задатка 1.11 следи да тачке α, β и γ представљају темена једнакостраничног троугла. Самим тим, тада је $|\arg\alpha - \arg\beta| = 2\pi/3$. Будући да је $\alpha = e^{\mathrm{i}\arg a}$, то важи $\arg\alpha = \arg a$. На исти начин је $\arg\beta = \arg b$. Према претходном добијамо да важи $|\arg a - \arg b| = 2\pi/3$. Према томе, можемо писати

$$\begin{aligned}
|a-b|^2 &= |a|^2 + |b|^2 - \overline{a}b - a\overline{b} = |a|^2 + |b|^2 - |a||b|\left(e^{\mathrm{i}(\arg b - \arg a)} + e^{\mathrm{i}(\arg a - \arg b)}\right) \\
&= |a|^2 + |b|^2 - 2|a||b|\cos|\arg a - \arg b| = |a|^2 + |b|^2 - 2|a||b|\cos\frac{2\pi}{3} \\
&= |a|^2 + |b|^2 + |a||b| \\
&\geq 3|a||b|.
\end{aligned}$$

За дате реалне бројеве a и b важи $e^{2\pi \mathrm{i}(b-a)} = 1$ ако и само ако је $b - a \in \mathbb{Z}$. Према томе, имајући у виду чињеницу да је

$$\int_a^b e^{2\pi \mathrm{i}x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \cdot e^{2\pi\mathrm{i}x}\Big|_a^b = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \cdot \left(e^{2\pi\mathrm{i}b} - e^{2\pi\mathrm{i}a}\right) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \cdot e^{2\pi\mathrm{i}a} \cdot \left(e^{2\pi\mathrm{i}(b-a)} - 1\right),$$

долазимо до закључка да важи

$$\int_a^b e^{2\pi\mathrm{i}x}\,\mathrm{d}x = 0 \quad \text{ако и само ако} \quad b - a \in \mathbb{Z}.$$

Претходно добијено својство можемо искористити за решавање следећег комбинаторног проблема.

Пример 1.4 Дати правоугаоник P издељен је на правоугаонике P_j са међусобно дисјунктним унутрашњостима, где је $j = 1, 2, \ldots, n$, при чему сваки од правоугаоника P_j има странице паралелне одговарајућим страницама почетног правоугаоника P и има бар једну страницу целобројне дужине. Доказати да правоугаоник P има бар једну страницу целобројне дужине.

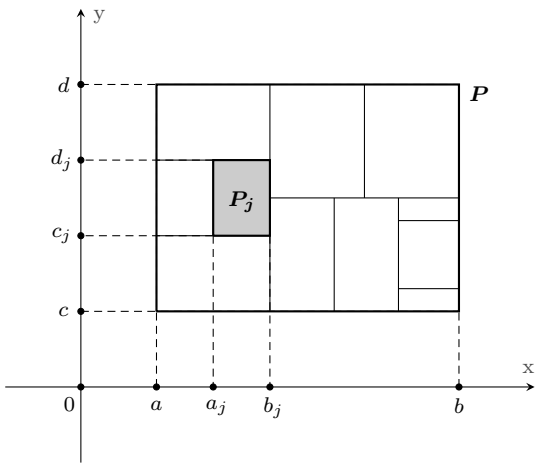
Решење. Пре свега, претпоставимо да је правоугаоник P смештен у раван $\mathbb{R}^2$ тако да су му странице паралелне координатним осама. Можемо писати

$$P = [a, b] \times [c, d].$$

Слично је

$$P_j = [a_j, b_j] \times [c_j, d_j],$$

за све $j = 1, 2, \ldots, n$, будући да су странице сваког од датих правугаоника P_j паралелне координатним осама. Поред тога, сваки од правоугоника P_j на које је издељен почетни правоугаоник P, има неку од страница целобројне дужине. Самим тим, за све $j = 1, 2, \ldots, n$, бар један од бројева $b_j - a_j$ и $d_j - c_j$, који представљају дужине страница правоугаоника P_j, јесте цео број. Користећи уводна разматрања која претходе овом примеру добијамо



Слика уз Пример 1.4.

$$\iint_{P_j} e^{2\pi\mathrm{i}(x+y)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \left(\int_{a_j}^{b_j} e^{2\pi\mathrm{i}x}\,\mathrm{d}x\right) \cdot \left(\int_{c_j}^{d_j} e^{2\pi\mathrm{i}y}\,\mathrm{d}y\right) = 0,$$

за све $j = 1, 2, \ldots, n$. Затим, налазимо

$$\left(\int_a^b e^{2\pi\mathrm{i}x}\,\mathrm{d}x\right) \cdot \left(\int_c^d e^{2\pi\mathrm{i}y}\,\mathrm{d}y\right) = \iint_P e^{2\pi\mathrm{i}(x+y)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sum_{j=1}^{n} \iint_{P_j} e^{2\pi\mathrm{i}(x+y)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0,$$

одакле следи

$$\int_a^b e^{2\pi\mathrm{i}x}\,\mathrm{d}x = 0 \quad \text{или} \quad \int_c^d e^{2\pi\mathrm{i}y}\,\mathrm{d}y = 0.$$

У првом случају је $b - a \in \mathbb{Z}$, док у другом случају важи $d - c \in \mathbb{Z}$. Стога, почетни правоугаоник P има бар једну страницу целобројне дужине. $\square$