Александра Делић
Зорица Дражић
Сандра Живановић
Марија Ивановић

ЗБИРКА РЕШЕНИХ ЗАДАТАКА ИЗ УВОДА У НУМЕРИЧКУ МАТЕМАТИКУ

Универзитет у Београду
Математички факултет
Београд, 2017.

др Александра Делић
др Зорица Дражић
др Сандра Живановић (рођ. Хоцић)
Марија Ивановић

ЗБИРКА РЕШЕНИХ ЗАДАТАКА ИЗ УВОДА У НУМЕРИЧКУ МАТЕМАТИКУ

Прво издање

Издавач: Математички факултет, Студентски трг 16, Београд

За издавача: *проф. др Зоран Ракић*

Издавачки одбор: *проф. др Милош Арсеновић*, председник
проф. др Олга Атанацковић
проф. др Предраг Јаничић
проф. др Зоран Петровић

Рецензенти: *проф. др Бошко Јовановић*
проф. др Бранко Малешевић

Штампа и повез: DonatGraf, Београд

Тираж: 300

ISBN: 978-86-7589-119-2

UDC: 519.216/.65(075.8)(076)

MSC (2010): 65D05, 65D25, 65D30, 65F05, 65F10, 65H05

Текст је обрађен ауторски уз примену програмског пакета LaTeX.

Предговор

Ова збирка садржи решене задатке са писменог дела испита из предмета *Увод у нумеричку математику* на Математичком факултету Универзитета у Београду. Првенствено је намењена студентима Математичког факултета који слушају поменути предмет, али се аутори надају да ће текст бити од користи и другим студентима који имају додира са овом облашћу.

Ова збирка је замишљена као материјал који се користи уз уџбеник, дакле не садржи елементе теорије који су неопходни за разумевање и решавање датих задатака.

Задаци су груписани по областима, а не по испитним роковима. Прва глава посвећена је *Интерполацији функција и нумеричком диференцирању*, друга глава садржи задатке из *Нумеричке интеграције*, трећа глава односи се на *Нумеричке методе за решавање система линеарних једначина* и последња, четврта глава, садржи задатке из *Нелинеарних једначина*.

Аутори се захваљују рецензентима проф. др Бошку Јовановићу, редовном професору Математичког факултета Универзитета у Београду и проф. др Бранку Малешевићу, ванредном професору Електротехничког факултета Универзитета у Београду, који су својим саветима и сугестијама допринели да збирка добије свој коначни изглед.

У Београду, мај 2017.

Аутори

Садржај

2 Интеграција

2.1 Њутн-Котесове квадратурне формуле

2.1 *Извести квадратурну формулу облика*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = A_1 f(0) + A_2 f\left(\tfrac{\pi}{4}\right) + A_3 f\left(\tfrac{\pi}{2}\right) + R(f)$$

и оценити грешку. Помоћу добијене формуле израчунати приближну вредност интеграла

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{tg}(\sin x)dx.$$

Решење: У овом поглављу се претпоставља да сви интеграли постоје као и све вредности функција у разматраним тачкама. Њутн-Котесове квадратурне формуле су облика

$$\int_a^b p(x)f(x)dx = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) + R(f),$$

где је $p(x) > 0$ тежинска функција, непрекидна на интервалу (a, b). Грешка $R(f)$ квадратурне формуле Њутн-Котесовог типа процењује се следећим изразом:

$$|R(f)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \int_a^b p(x)|\omega_{n+1}(x)|dx, \tag{2.1}$$

где је $M_{n+1} = \max_{[a,b]} |f^{(n+1)}(x)|$ и $\omega_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$. Формула треба да буде тачна за полиноме што вишег степена, па узимајући за $f(x)$, редом, 1, x и x^2, добија се следећи систем једначина

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2} = A_1 + A_2 + A_3,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} xdx = \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi}{4}A_2 + \frac{\pi}{2}A_3,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2dx = \frac{\pi^3}{24} = \frac{\pi^2}{16}A_2 + \frac{\pi^2}{4}A_3.$$

Одавде се налази да је $A_1 = A_3 = \frac{\pi}{12}$ и $A_2 = \frac{\pi}{3}$ па је добијена формула

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \tfrac{\pi}{12} f(0) + \tfrac{\pi}{3} f\left(\tfrac{\pi}{4}\right) + \tfrac{\pi}{12} f\left(\tfrac{\pi}{2}\right) + R(f).$$

Можемо приметити да је $A_1 = A_3$. Наиме, важи следеће правило. Ако је тежинска функција $p(x)$ парна у односу на средину интервала интеграције, а чворови симетрично распоређени у односу на средину интервала, онда су коефицијенти квадратурне формуле, који одговарају симетричним чворовима, једнаки ([1]). Остаје да се одреди грешка $R(f)$. Важи и следеће тврђење. Када су чворови квадратурне формуле симетрично распоређени у односу на средину интервала интеграције и има их непаран број, а тежинска функција парна у односу на средину интервала, тада формула има повишен ред тачности ([1]). Ово тврђење се може и директно проверити. Ако се узме $f(x) = x^3$ добија се да је $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^3 dx = \frac{\pi^4}{64} = \frac{\pi}{3}\frac{\pi^3}{64} + \frac{\pi}{12}\frac{\pi^3}{8}$. Одавде следи да је квадратурна формула тачна и за полиноме степена три, па у формули за грешку (2.1) треба изабрати $n = 3$. Како имамо три чвора, средњи ћемо дуплирати. Следи да је

$$|R(f)| \leq \frac{M_4}{4!} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|(x-0)\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right| dx \approx 0.0033 M_4.$$

Приближна вредност траженог интеграла је

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{tg}(\sin x)dx \approx \frac{\pi}{12}\cdot 0 + \frac{\pi}{3}\cdot 0.8545 + \frac{\pi}{12}\cdot 1.5574 = 1.3026.$$

Уз помоћ пакета $MAPLE$, који рачуна вредност интеграла симболички, добијамо да је $I = 1.332140985$, те ће се та вредност сматрати и називати тачном. У наредним задацима овог поглавља, такође ће бити наведене тачне вредности тражених интеграла добијене помоћу овог софтвера.

2.2 *Извести квадратурну формулу облика*

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \tfrac{f(x)dx}{\sqrt{1-x^2}} = A_0 f\left(-\tfrac{1}{4}\right) + A_1 f(0) + A_2 f\left(\tfrac{1}{4}\right) + R(f)$$

тако да она буде тачна за полиноме што је могуће вишег степена а затим помоћу ње приближно израчунати

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{e^{-x}dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Рачунати на четири децимале.

Решење: Коефицијенте A_i, $i = 0, 1, 2$ одређујемо из услова да формула буде тачна за полиноме што је могуће вишег степена. Како је број неодређених параметара у формули три, формула треба да буде тачна за полиноме $f(x) = x^k$, $k = 0, 1, 2$. Ови услови дају систем линеарних једначина

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{3} = A_0 + A_1 + A_2,$$
$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = 0 = -\frac{1}{4}A_0 + \frac{1}{4}A_2,$$
$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}} = 2\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 t\, dt = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{16}A_1 + \frac{1}{16}A_2,$$

чијим се решавањем добија $A_0 = A_2 = \frac{4\pi}{3} - 2\sqrt{3} = 0.7247$ и $A_1 = 4\sqrt{3} - \frac{7\pi}{3} = -0.4022$, па је квадратурна формула облика

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{f(x)dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0.7247 \cdot f\left(-\tfrac{1}{4}\right) - 0.4022 \cdot f(0) + 0.7247 \cdot f\left(\tfrac{1}{4}\right) + R(f).$$

Формула је тачна и за $f(x) = x^3$ што се може директно проверити, док за $f(x) = x^4$ није тачна. За $f(x) = e^{-x}$ добија се

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{e^{-x}dx}{\sqrt{1-x^2}} \approx 0.7247 \cdot \left(e^{\frac{1}{4}}\right) - 0.4022 + 0.7247 \cdot \left(e^{-\frac{1}{4}}\right) = 1.0927.$$

Тачна вредност интеграла је $I = 1.093069598$.

2.3 *Извести квадратурну формулу облика*

$$\int_0^1 e^{-x} f(x)dx = A_1 f\left(\tfrac{1}{4}\right) + A_2 f\left(\tfrac{1}{2}\right) + A_3 f\left(\tfrac{3}{4}\right) + R(f).$$

Решење: Поступак решавања је исти као у задатку 2.2. Узимајући за $f(x)$ полиноме 1, x и x^2, редом, добија се следећи систем

$$\int_0^1 e^{-x}dx = 1 - \frac{1}{e} = A_1 + A_2 + A_3,$$
$$\int_0^1 e^{-x}xdx = 1 - \frac{2}{e} = \frac{1}{4}A_1 + \frac{1}{2}A_2 + \frac{3}{4}A_3,$$
$$\int_0^1 e^{-x}x^2dx = 2 - \frac{5}{e} = \frac{1}{16}A_1 + \frac{1}{4}A_2 + \frac{9}{16}A_3,$$

чијим се решавањем налазе коефицијенти $A_1 = 9 - \frac{23}{e} = 0.5388$, $A_2 = -19 + \frac{51}{e} = -0.2381$ и $A_3 = 11 - \frac{29}{e} = 0.3315$. Тражена формула је облика

$$\int_0^1 e^{-x} f(x)dx = 0.5388 \cdot f\left(\tfrac{1}{4}\right) - 0.2381 \cdot f\left(\tfrac{1}{2}\right) + 0.3315 \cdot f\left(\tfrac{3}{4}\right) + R(f).$$

2.4 *Извести квадратурну формулу облика*

$$\int_0^1 e^{-x} f(x)dx = A_1 f\left(\tfrac{1}{4}\right) + A_2 f\left(\tfrac{1}{2}\right) + A_3 f\left(\tfrac{3}{4}\right) + R(f)$$

тако да она буде тачна за полиноме што је могуће вишег степена. Применом добијене формуле приближно израчунати

$$I = \int_0^1 \frac{e^{-x}dx}{\sin x + 5}.$$

Рачунати са четири децимале.

Решење: Применом формуле добијене у задатку 2.3 за $f(x) = \frac{1}{\sin x + 5}$, добија се

$$I = \int_0^1 \tfrac{e^{-x}dx}{\sin x + 5} \approx 0.5388 \cdot 0.1906 - 0.2381 \cdot 0.1825 + 0.3315 \cdot 0.1760 = 0.1176.$$

Тачна вредност интеграла је 0.1175437073.

2.5 *Извести квадратурну формулу облика*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin x dx = Af(0) + Bf\left(\tfrac{\pi}{4}\right) + Cf\left(\tfrac{\pi}{2}\right) + R(f)$$

тако да она буде тачна за полиноме што је могуће вишег степена а затим помоћу ње приближно израчунати

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x} \sin x dx.$$

Решење: Поступак решавања је исти као у задатку 2.2. Добија се следећи систем

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 = A + B + C,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx = -x \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 = \frac{\pi}{4}B + \frac{\pi}{2}C,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx = x^2 \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 2(x \sin x + \cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi - 2 = \frac{\pi^2}{16}B + \frac{\pi^2}{4}C,$$

чијим се решавањем налазе коефицијенти $A = 1-\frac{4}{\pi}+\frac{6\pi-16}{\pi^2} = 0.0155$, $B = \frac{4}{\pi} - \frac{12\pi-32}{\pi^2} = 0.6958$ и $C = \frac{6\pi-16}{\pi^2} = 0.2887$. Тражена формула је облика

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin x dx = 0.0155 \cdot f(0) + 0.6958 \cdot f\left(\frac{\pi}{4}\right) + 0.2887 \cdot f\left(\frac{\pi}{2}\right) + R(f).$$

За $f(x) = e^{-x}$ добија се

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x}\sin x dx \approx 0.0155\cdot 1+0.6958\cdot 0.4559+0.2887\cdot 0.2079 = 0.3927.$$

Тачна вредност интеграла је 0.3960602118.

2.6 *Извести квадратурну формулу облика*

$$\int_0^1 \ln x f(x)dx = Af(0) + Bf(1) + R(f),$$

а затим применом добијене формуле приближно израчунати $I = \int_0^1 \ln x \sin x dx$. *Рачунати са 5 значајних цифара.*

Решење: Поступак решавања је исти као у задатку 2.2. Из система

$$\int_0^1 \ln x dx = -1 = A + B,$$
$$\int_0^1 x\ln x dx = -\frac{1}{4} = B,$$

добијају се непознати коефицијенти па је тражена формула облика

$$\int_0^1 \ln x f(x)dx = -0.75000 \cdot f(0) - 0.25000 \cdot f(1) + R(f).$$

За $f(x) = \sin x$ добија се

$$I = \int_0^1 \ln x \sin x dx \approx -0.25000 \cdot 0.84147 = -0.21037.$$

2.7 *Одредити непознате коефицијенте у квадратурној формули*

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = Af(-x_0) + Bf(0) + Cf(x_0) + R(f)$$

тако да она буде тачна за све полиноме степена мањег или једнаког од пет ако је $0 < x_0 \le 1$. *Помоћу добијене формуле приближно израчунати вредност интеграла*

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x dx.$$

Решење: Чворови су симетрично распоређени а тежинска функција $p(x) = 1$ је парна у односу на средину интервала интеграције. Одатле следи да је $A = C$. Узимајући за $f(x)$ полиноме 1, x, x^2, x^3, x^4 и x^5 редом, добија се следећи систем

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1} dx = 2 = A + B + C,\\
&\int_{-1}^{1} x dx = 0 = -Ax_0 + Cx_0,\\
&\int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3} = Ax_0^2 + Cx_0^2,\\
&\int_{-1}^{1} x^3 dx = 0 = -Ax_0^3 + Cx_0^3,\\
&\int_{-1}^{1} x^4 dx = \frac{2}{5} = Ax_0^4 + Cx_0^4,\\
&\int_{-1}^{1} x^5 dx = 0 = -Ax_0^5 + Cx_0^5,
\end{aligned}$$

чијим се решавањем добија $A = C = \frac{5}{9}$, $B = \frac{8}{9}$ и $x_0 = \sqrt{\frac{3}{5}}$. Да би се одредила вредност интеграла $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x dx$ прво се мора пресликати интервал $[0, \frac{\pi}{4}]$ на $[-1, 1]$. То се постиже сменом $x = \frac{\pi}{8}(t+1)$.

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x dx = \frac{\pi}{8} \int_{-1}^{1} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}(t+1)\right) dt\\
&\approx \frac{\pi}{8}\left(\frac{5}{9}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}\left(1-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\right) + \frac{8}{9}\operatorname{tg}\frac{\pi}{8} + \frac{5}{9}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}\left(1+\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\right)\right) = 0.34655.
\end{aligned}$$

Тачна вредност интеграла је 0.3465735903.

2.8 *Одредити квадратурну формулу облика*

$$\int_{-1}^{1} f(x) dx = A_1 f(-1) + A_2 f(1) + A_3 f'(-1) + A_4 f'(1) + R(f)$$

тако да она буде тачна за полиноме што је могуће вишег степена.

Решење: Узимајући за $f(x)$ полиноме 1, x, x^2 и x^3, редом, добија се следећи систем

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} dx &= 2 = A_1 + A_2,\\
\int_{-1}^{1} x dx &= 0 = -A_1 + A_2 + A_3 + A_4,\\
\int_{-1}^{1} x^2 dx &= \frac{2}{3} = A_1 + A_2 - 2A_3 + 2A_4,\\
\int_{-1}^{1} x^3 dx &= 0 = -A_1 + A_2 + 3A_3 + 3A_4,
\end{aligned}$$

чијим се решавањем добија $A_1 = A_2 = 1$, $A_3 = \frac{1}{3}$ и $A_4 = -\frac{1}{3}$. Тражена формула је облика

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx f(-1) + f(1) + \tfrac{1}{3}f'(-1) - \tfrac{1}{3}f'(1).$$

Како је $R(f) = \int_{-1}^{1} f(x)dx - A_1 f(-1) - A_2 f(1) - A_3 f'(-1) - A_4 f'(1)$, директно се проверава да добијена формула није тачна за $f(x) = x^4$, тј. да је грешка $R(x^4) = \int_{-1}^{1} x^4 dx - 1 - 1 + \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{16}{15} \neq 0$, те је ред грешке ове формуле три.

2.9 *Одредити константе a, b, α такве да квадратурна формула*

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx a \cdot f(-1) + b \cdot f(-\alpha) + b \cdot f(\alpha) + a \cdot f(1)$$

важи за полиноме што је могуће вишег степена. Помоћу добијене формуле израчунати приближну вредност интеграла

$$I = \int_{2}^{4} e^{\sqrt{x}} dx.$$

Решење: Узимајући за $f(x)$ редом полиноме 1, x, x^2, x^3 и x^4, добија се систем једначина чијим се решавањем налазе непознате константе. Квадратурна формула је облика

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \tfrac{1}{6}f(-1) + \tfrac{5}{6}f\left(-\sqrt{\tfrac{1}{5}}\right) + \tfrac{5}{6}f\left(\sqrt{\tfrac{1}{5}}\right) + \tfrac{1}{6}f(1).$$

Формула је тачна и за $f(x) = x^5$ ($R(x^5) = 0$), док за $f(x) = x^6$ није тачна. Зато је ред грешке ове формуле пет. На тражени интеграл се, уз смену $x = t + 3$, може применити ова формула, па се добија

$$I = \int_2^4 e^{\sqrt{x}} dx = \int_{-1}^1 e^{\sqrt{t+3}} dt$$
$$\approx \tfrac{1}{6} e^{\sqrt{-1+3}} + \tfrac{5}{6} e^{\sqrt{(-\sqrt{\frac{1}{5}})+3}} + \tfrac{5}{6} e^{\sqrt{\sqrt{\frac{1}{5}}+3}} + \tfrac{1}{6} e^{\sqrt{1+3}} = 11.3706.$$

Тачна вредност интеграла износи 11.37058402.

2.10 *Трапезном квадратурном формулом са тачношћу* $0.5 \cdot 10^{-2}$ *израчунати приближну вредност интеграла*

$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx.$$

За оцену грешке методе користити Рунгеову формулу. Рачунати са три децимале.

Решење: Општа трапезна квадратурна формула је облика

$$I_h = \frac{h}{2}\Big(f(x_0) + f(x_n) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)\Big). \tag{2.2}$$

Рунгеова оцена грешке се рачуна по формули

$$R \approx \frac{|I_h - I_{\frac{h}{2}}|}{2^p - 1}, \tag{2.3}$$

где су I_h и $I_{\frac{h}{2}}$ вредности интеграла израчунате са корацима h и $\frac{h}{2}$, а p ред грешке квадратурне формуле. Код трапезне квадратурне формуле $p = 2$ па је формула облика

$$R \approx \frac{|I_h - I_{\frac{h}{2}}|}{3}. \tag{2.4}$$

За решавање задатка трапезном формулом погодно је направити таблицу следећег облика: у првој колони се задају чворови, у другој вредности функције на крајевима сегмента (први и последњи чвор) а у трећој се налазе вредности функције у унутрашњим чворовима. У последњој врсти таблице уносе се суме елемената по тим колонама.

Нека је, рецимо, $h = \frac{\pi}{4}$. Добија се следећа таблица

x	$f(x)$
$\pi/4$	0.900
$\pi/2$	0.637
$\sum$	1.537

Приближна вредност интеграла је $I_{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8}\cdot 1.537 = 0.604$. За корак $\frac{h}{2} = \frac{\pi}{8}$, добија се таблица са једним податком више

x		
$\pi/4$	0.900	
$3\pi/8$		0.784
$\pi/2$	0.637	
$\sum$	1.537	0.784

Приближна вредност интеграла је $I_{\frac{\pi}{8}} = \frac{\pi}{16}(1.537 + 2\cdot 0.784) = 0.610$. Како је Рунгеова оцена грешке $\frac{|I_{\frac{\pi}{4}} - I_{\frac{\pi}{8}}|}{3} = 0.2\cdot 10^{-2}$ мања од задате тачности $0.5\cdot 10^{-2}$, може се узети да је приближна вредност интеграла $I \approx 0.610$. Тачна вредност интеграла је 0.6117862869.

2.11 *Израчунати приближну вредност интеграла*

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx$$

са тачношћу $0.5\cdot 10^{-3}$ *користећи трапезну квадратурну формулу. За оцену грешке методе користити Рунгеову формулу. Рачунати са четири децимале.*

Решење: Поступак решавања је исти као у задатку 2.10. Приметити да је вредност подинтегралне функције у чвору $x_0 = 0$ једнака јединици. Ако се израчунају вредности интеграла са корацима $h = \frac{\pi}{14}$ и $\frac{h}{2} = \frac{\pi}{28}$ тачност ће бити задовољена. Тражена вредност је $I \approx 1.3702$. Тачна вредност је 1.370762168.

2.12 *Користећи оцену грешке трапезне квадратурне формуле одредити корак* h *са којим се може приближно израчунати вредност интеграла*

$$I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (1 + e^{-x}\cos x) dx$$

тако да укупна грешка не буде већа од $\varepsilon = 10^{-2}$, *а затим одредити приближну вредност интеграла.*

Решење: Укупну грешку чине грешка методе R_M и грешка рачуна R_R. Ако су вредности функције која се интеграли дате са границом апсолутне грешке δ, није тешко проверити да за грешку рачуна опште формуле трапеза важи оцена $|R_R| \leq \delta(b-a)$, где су a и b крајеви интервала интеграције. Иста оцена важи и за општу формулу правоугаоника и општу Симпсонову квадратурну формулу. Како укупна грешка треба бити мања од 10^{-2}, може се узети да је $|R_M| \leq \frac{1}{2}10^{-2}$ и $|R_R| \leq \frac{1}{2}10^{-2}$. Из друге неједнакости добија се $\frac{\delta\pi}{2} \leq \frac{1}{2}10^{-2}$, односно $\delta \leq 0.319 \cdot 10^{-2}$. Дакле, довољно је радити са три децимале ($\delta = 0.5 \cdot 10^{-3}$). Сада, од укупне дозвољене грешке за грешку методе R_M преостаје $|R_M| \leq \varepsilon - \delta(b-a) = 10^{-2} - 0.5 \cdot 10^{-3}\frac{\pi}{2} = 0.923 \cdot 10^{-2}$. Грешка трапезне формуле оцењује се изразом

$$|R_M| \leq \frac{(b-a)}{12}h^2 M_2, \tag{2.5}$$

где је $M_2 = \max_{[\frac{\pi}{2},\pi]}|f''(x)|$. Како је $f''(x) = 2e^{-x}\sin x$, добија се да на $[\frac{\pi}{2},\pi]$ величина M_2 износи $|f''(\frac{\pi}{2})| = 2e^{-\frac{\pi}{2}} = 0.4158$, јер је $|f''(x)|$ на датом интервалу опадајућа функција као производ две ненегативне опадајуће функције. Из (2.5) добија се

$$h \leq \sqrt{\frac{12 \cdot 0.923 \cdot 10^{-2}}{\frac{\pi}{2} \cdot 0.4158}} \leq 0.412.$$

Може се узети $h = \frac{\pi}{8} \approx 0.393$. Добија се следећа таблица.

x		
$\pi/2$	1	
$5\pi/8$		0.946
$6\pi/8$		0.933
$7\pi/8$		0.941
π	0.957	
$\sum$	1.957	2.820

Приближна вредност интеграла са траженом тачношћу је $I_{\frac{\pi}{8}} = \frac{\pi}{16}(1.957 + 2 \cdot 2.820) = 1.492$, док је тачна вредност 1.488463499.

2.13 *Користећи трепезну квадратурну формулу приближно израчунати*

$$I = \int_0^1 x\ln(x+1)dx,$$

са корацима $h_1 = 0.5$ *и* $h_2 = 0.25$. *Проценити Рунгеову оцену грешке. Рачунати са четири децимале.*

Решење: За корак $h_1 = 0.5$ добија се следећа таблица

x		
0	0	
0.5		0.2027
1	0.6931	
$\sum$	0.6931	0.2027

Приближна вредност интеграла је

$$I_{0.5} = \frac{1}{4}(0.6931 + 2 \cdot 0.2027) = 0.2746.$$

За $h_2 = 0.25$ добијају се подаци у новим чворовима

x	
0.25	0.0558
0.75	0.4197
$\sum$	0.4755

Приближна вредност интеграла је $I_{0.25} = \frac{1}{8}(0.6931 + 2 \cdot (0.2027 + 0.4755)) = 0.2562$. Тачна вредност овог интеграла је 0.25. Рунгеова оцена грешке је $\frac{|I_{0.5} - I_{0.25}|}{3} = 0.0062$.

2.14 *Користећи трапезну квадратурну формулу, рачунајући са четири децимале, приближно израчунати*

$$I = \int_0^1 x^2 \sin(x+1) dx,$$

делећи дати интервал на десет једнаких подинтервала. Израчунати Рунгеову оцену грешке.

Решење: За $h = \frac{1}{5}$ добија се следећа таблица

x		
0	0	
1/5		0.0373
2/5		0.1577
3/5		0.3598
4/5		0.6233
1	0.9093	
$\sum$	0.9093	1.1781

приближна вредност интеграла је

$$I_{\frac{1}{5}} = \frac{1}{10}(0.9093 + 2 \cdot 1.1781) = 0.3266.$$

За корак $\frac{h}{2} = \frac{1}{10}$, добијају се подаци у новим чворовима

x	
1/10	0.0089
3/10	0.0867
5/10	0.2494
7/10	0.4859
9/10	0.7665
$\sum$	1.5974

Приближна вредност интеграла је

$$I_{\frac{1}{10}} = \frac{1}{20}(0.9093 + 2 \cdot (1.5974 + 1.1781)) = 0.3230.$$

Рунгеова оцена грешке је $\frac{|I_{\frac{1}{5}} - I_{\frac{1}{10}}|}{3} = 0.0012$. Тачна вредност интеграла износи 0.321843406.

2.15 *Одредити број децимала са којима је потребно рачунати и одредити највећу вредност корака h са којом треба поделити интервал интеграције како би Симпсонова формула за рачунање интеграла*

$$I = \int_1^2 \frac{\ln x}{x}\,dx$$

дала укупну грешку мању од 10^{-3}. Израчунати приближну вредност интеграла користећи Симпсонову формулу.

Решење: Укупну грешку чине грешка методе R_M и грешка рачуна R_R. Може се узети произвољно да је $|R_M| \leq \frac{1}{2}10^{-3}$ и $|R_R| \leq \frac{1}{2}10^{-3}$. Грешка Симпсонове формуле оцењује се изразом

$$|R_M| \leq \frac{b-a}{180} h^4 M_4. \tag{2.6}$$

За одређивање величине $M_4 = \max_{[1,2]} |f^{IV}|$, треба наћи следеће изводе подинтегралне функције:

$$f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}, \quad f''(x) = \frac{-3+2\ln x}{x^3}, \quad f'''(x) = \frac{11-6\ln x}{x^4},$$
$$f^{IV}(x) = \frac{-50+24\ln x}{x^5}, \quad f^{V}(x) = \frac{274-120\ln x}{x^6}.$$

Пошто је $f^V(x) > 0$ за $x \in [1,2]$ (интервал интеграције), добија се да је $f^{IV}(x)$ монотоно растућа функција на $[1,2]$. Како је $f^{IV}(x)$ негативна на [1,2] следи да се максимум функције $|f^{IV}|$ постиже за $x = 1$, те је $M_4 = 50$.

Из $|R_M| \leq \frac{2-1}{180}50h^4 \leq \frac{1}{2}10^{-3}$ следи да за корак интеграције h важи оцена $h \leq \sqrt[4]{\frac{180}{50}\frac{1}{2}10^{-3}} \leq 0.2060$, што даје и доњу границу за број чворова $n \geq \lceil \frac{b-a}{h} + 1 \rceil = 6$. С обзиром на то да за примену Симпсонове формуле треба непаран број чворова, изабере се да их има седам, чиме се обезбеђује највећи тражени корак $h = \frac{1}{6}$. Из оцене $|R_R| \leq \delta(b-a) = \delta \leq \frac{1}{2}10^{-3}$ добија се да је довољно радити са три децимале. Преостало је још израчунати задати интеграл. Симпсонова квадратурна формула је облика

$$S_h = \frac{h}{3}\Big(f(x_0) + f(x_{2n}) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_{2k})) + 4\sum_{k=1}^{n} f(x_{2k-1})\Big), \qquad (2.7)$$

где је број чворова једнак $2n+1$. Уколико желимо избећи заокруживање код поделе сегмента на чворове, нека је корак $h = \frac{1}{8} = 0.125$ (уместо $h = \frac{1}{6}$). За такав избор корака, у складу са претходним, укупна грешка биће мања од 10^{-3}. За решавање задатка Симпсоновом формулом погодно је направити таблицу следећег облика. У првој колони се задају чворови а вредности функције у њима се записују у наредне три колоне. У првој од њих се налазе вредности функције у x_0 и x_{2n}, у другој вредности функције у чворовима x_{2k}, $k = 1, ..., n-1$, док се у трећој налазе вредности функције у чворовима x_{2k-1}, $k = 1, ..., n$. У таблицу се уносе и суме елемената по тим колонама.

x			
1	0		
1.125			0.105
1.250		0.179	
1.375			0.232
1.500		0.270	
1.625			0.299
1.750		0.320	
1.875			0.335
2	0.374		
$\sum$	0.347	0.769	0.971

Приближна вредност интеграла је $S_{\frac{1}{8}} = \frac{0.125}{3}(0.347 + 2 \cdot 0.769 + 4 \cdot 0.971) = 0.240$. Вредност интеграла добијена помоћу $MAPLE$-а је 0.2402265070.

2.16 *Одредити број децимала са којима је потребно рачунати и одредити највећу вредност корака h са којом треба поделити интервал* *интеграције како би Симпсонова формула за рачунање интеграла*

$$I = \int_0^1 \tfrac{x}{e^x}\, dx$$

дала укупну грешку мању од 10^{-4}. *Израчунати приближну вредност интеграла користећи Симпсонову формулу.*

Решење: Поступак решавања је исти као у задатку 2.15. Највећи тражени корак је $h = \frac{1}{6}$. Довољно је радити са четири децимале. Ако се задатак реши са кораком $h = \frac{1}{8} = 0.125$ добија се вредност $I \approx 0.2642$, а тачна вредност је 0.2642411176.

2.17 *Симпсоновом квадратурном формулом израчунати приближну вредност интеграла*

$$I = \int_0^1 \tfrac{e^x}{1+x^2} dx$$

тако да Рунгеова оцена грешке не буде већа од 10^{-4}.

Решење: Рунгеова оцена грешке Симпсонове формуле рачуна се по формули (2.3) за $p = 4$ па је формула облика

$$R \approx \frac{|S_h - S_{\frac{h}{2}}|}{15}, \tag{2.8}$$

где су S_h и $S_{\frac{h}{2}}$ вредности интеграла израчунате Симпсоновом квадратурном формулом са корацима h и $\frac{h}{2}$. Како за примену ове формуле треба непаран број чворова, нека је, рецимо, $h = 0.25$. Пошто на укупну грешку резултата утиче и грешка рачуна, а због задате тачности 10^{-4}, може се узети да је $\delta = 0.5 \cdot 10^{-5}$, односно рачунати са пет децимала. Вредности функције у чворовима могу се приказати следећом таблицом.

x			
0	1		
0.25			1.20849
0.5		1.31898	
0.75			1.35488
1	1.35914		
$\sum$	2.35914	1.31898	2.56337

Користећи Симпсонову квадратурну формулу (2.7) добија се $S_{0.25} = \frac{0.25}{3}(2.35914 + 2 \cdot 1.31898 + 4 \cdot 2.56337) = 1.27088$. За $\frac{h}{2} = 0.125$ вредности функције у новим чворовима дате су следећом таблицом

x	
0.125	1.11572
0.375	1.27561
0.625	1.34346
0.875	1.35866
$\sum$	5.09345

Чворови уписани у последњу таблицу имају непарне индексе. Због тога ће се сума вредности функције у њима множити са четири. Унутрашњи чворови из претпоследње таблице сада имају парне индексе, те ће се сума вредности функције у њима множити са два. Дакле, приближна вредност интеграла је

$$S_{0.125} = \frac{0.125}{3}(2.35914 + 2 \cdot (1.31898 + 2.56337) + 4 \cdot 5.09345) = 1.27074.$$

Рунгеова оцена грешке је $\frac{|S_{0.25} - S_{0.125}|}{15} = 10^{-5} < 10^{-4}$, па је тражена вредност интеграла $I \approx 1.27074$. Тачна вредност је 1.270724140.

2.18 *Симпсоновом квадратурном формулом израчунати приближну вредност интеграла*

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \operatorname{tg}^2 x dx$$

тако да Рунгеова оцена грешке не буде већа од 10^{-4}.

Решење: Поступак решавања је исти као у задатку 2.17. Нека је, рецимо, $h = \frac{\pi}{16}$. Добија се следећа таблица

x			
0	0		
$\pi/16$			0.00777
$\pi/8$		0.06738	
$3\pi/16$			0.26299
$\pi/4$	0.78540		
$\sum$	0.78540	0.06738	0.27076

Приближна вредност интеграла је

$$S_{\frac{\pi}{16}} = \frac{\pi}{16 \cdot 3}(0.78540 + 2 \cdot 0.06738 + 4 \cdot 0.27076) = 0.13111.$$

За $\frac{h}{2} = \frac{\pi}{32}$ добијају се подаци у новим чворовима

x	
$\pi/32$	0.00095
$3\pi/32$	0.02710
$5\pi/32$	0.14024
$7\pi/32$	0.46285
$\sum$	0.63114

Приближна вредност интеграла је

$$S_{\frac{\pi}{32}} = \frac{\pi}{32\cdot 3}(0.78540 + 2\cdot(0.06738 + 0.27076) + 4\cdot 0.63114) = 0.13045.$$

Како је Рунгеова оцена грешке $\frac{|S_{\frac{\pi}{16}} - S_{\frac{\pi}{32}}|}{15} = 4.4\cdot 10^{-5}$ мања од дозвољене 10^{-4}, приближна вредност интеграла је $I \approx 0.13045$. Тачна вредност износи 0.1303994356.

2.19 *Симпсоновом квадратурном формулом израчунати приближну вредност интеграла*

$$I = \int_0^{\pi} (x\sin x)^2 dx$$

тако да Рунгеова оцена грешке не буде већа од $\varepsilon = 10^{-3}$.

Решење: Ако се израчунају вредности интеграла са 9 и 17 чворова, Рунгеова оцена грешке биће мања од ε. Тражена вредност је $I \approx 4.3826$, док је тачна 4.382314620.

2.20 *Симпсоновом квадратурном формулом израчунати приближну вредност интеграла*

$$I = \int_1^{e} (x\ln x)^2 dx$$

тако да Рунгеова оцена грешке не буде већа од $\varepsilon = 10^{-3}$.

Решење: Ако се израчунају вредности интеграла са 3 и 5 чворова, Рунгеова оцена грешке биће мања од ε. Тражена вредност је $I \approx 3.6451$, док је тачна 3.719543874.

2.21 *Симпсоновом квадратурном формулом израчунати приближну вредност интеграла*

$$I = \int_0^{3} \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{\sqrt{2-\cos x}} dx$$

тако да Рунгеова оцена грешке не буде већа од $\varepsilon = 10^{-3}$.

Решење: Ако се израчунају вредности интеграла са 5 и 9 чворова, Рунгеова оцена грешке биће мања од ε. Тражена вредност је $I \approx 1.2656$, док је тачна 1.265719027.

2.22 *Симпсоновом квадратурном формулом израчунати приближну вредност интеграла*

$$I = \int_1^{4} \frac{\ln x}{1+\sin^2 x} dx$$

тако да Рунгеова оцена грешке не буде већа од $\varepsilon = \frac{1}{2}\cdot 10^{-3}$.