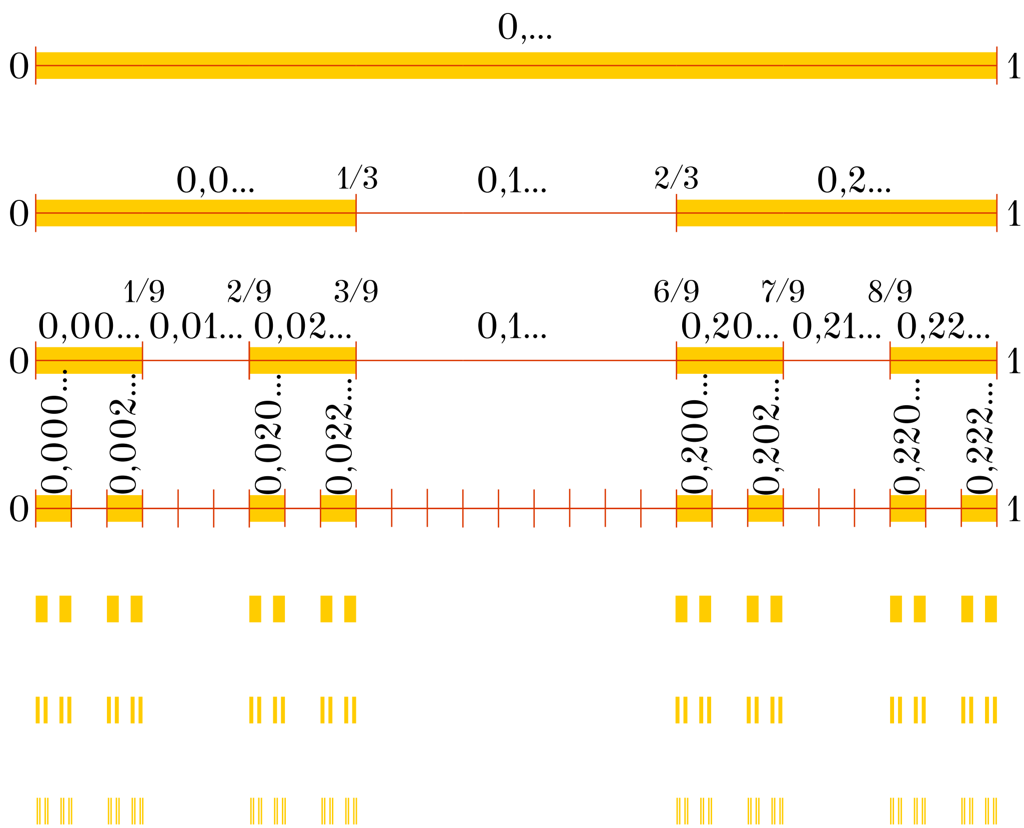
Небојша Икодиновић

УВОД У МАТЕМАТИЧКУ ЛОГИКУ



Математички факултет

Универзитет у Београду – Математички факултет

УВОД У МАТЕМАТИЧКУ ЛОГИКУ

Небојша Икодиновић

Београд, 2023

др Небојша Икодиновић

УВОД У МАТЕМАТИЧКУ ЛОГИКУ
Прво издање, 2023

Рецензенти:
др Предраг Тановић, научни саветник Математичког института САНУ
др Славко Моцоња, доцент Математичког факултета, Универзитет у Београду

Издавач: Универзитет у Београду – Математички факултет
Студентски трг 16, 11158 Београд, тел. (+381) 011 2027 801, matf@matf.bg.ac.rs

За издавача: др Зоран Ракић, декан

Обрада текста: аутор
Цртежи и корице: аутор
Фотографије: `https://www.wikipedia.org/` (Public Domain)
Штампа и повез: ТРИ О д.о.о.
Тираж: 300 примерака

CIP - Каталогизација у публикацији
Народна библиотека Србије, Београд

510.6(075.8)

ИКОДИНОВИЋ, Небојша, 1973-
Увод у математичку логику / Небојша Икодиновић. - 1. изд. - Београд : Универзитет, Математички факултет, 2023 ([Аранђеловац] : Три О). - 188 стр. : илустр. ; 26 cm

Тираж 300. - Напомене уз текст. - Библиографија: стр. 177-178. - Регистар.

ISBN 978-86-7589-177-2

а) Математичка логика

COBISS.SR-ID 124539913

Садржај

Предговор

Књига је резултат вишегодишњег осмишљавања и припремања курса *Увод у математичку логику*, на првој години студија математике. Неколико генерација студената је пратило настајање рукописа и ово је прилика да им захвалим на конструктивним коментарима и подстицајним дискусијама. Питања која смо једни другима постављали и одговори које смо размењивали често су (пре)усмеравали писање ове књиге. Посебну захвалност дугујем и рецензентима који су примедбама и предлозима утицали на коначан изглед књиге.

Концепт књиге је одређен тежњом да се истакну две ствари:

- снага математичког приступа у проучавању мишљења и закључивања (логика се од античких времена није значајно мењала, док половином 19. века, математика није почела да се њоме бави);
- доприноси које математика може добити од своје логике.[1]

Редослед излагања у овој књизи мање-више одговара развоју савремене математичке логике. Први део књиге одређују два кључна догађаја која су довела до настанка математичке логике. Први догађај је *алгебраизација логике*, започета Буловим радовима, а други догађај је *аритметизација логике*, започета радовима Дедекинда, Фрегеа и других, и која у Геделовим радовима доводи до спектакуларних резултата. Зато књига почиње поглављем о исказној алгебри и њеним законитостима. У следећем поглављу, основу свих разматрања чини *принцип математичке индукције*. То поглавље је посвећено формалним језицима и теоријама, који су изворно развијани по узору на аритметику. *Формални рачуни* данас заузимају веома значајно место у применама математичке логике, а посебно у развоју рачунарства. Сходно томе, формалне теорије су сликовито представљене као *машине за доказивање теорема*, чиме су истакнути рачунски аспекти вештине доказивања. Кроз примере и задатке уведен је велики број значајних формалних система: поред исказног рачуна, наведени су и формални рачуни група, уређења, мрежа, итд. Следеће поглавље издваја само један рачун – Природну дедукцију за чист предикатски језик. Овај рачун најбоље представљају речи његовог творца, Генцена: *Желео сам да конструишем формализам који ће бити близак, што је могуће више, стварном закључивању.* Заиста, правила природне дедукције веома лепо истичу употребу сваког логичког симбола, посебно квантификатора.[2] Теорија скупова, чије је темеље поставио Кантор, заузима централно место у књизи: уведен је *формални рачун* **ZF** за рад са скуповима; а затим је разрађен стандардни

[1] Амерички математичар М. Дејвис (1928–2023) је своју књигу *На логички погон* посветио једном великом доприносу математичке логике – открићу рачунара. У уводу те књиге аутор примећује: *Рачунар је заправо логичка машина. Он је настао на основу прочишћених увида које је значајни број логичара развијао …*

[2] Подсећамо на чувени Витгенштајнов (1889–1951) слоган: *Не питај за значење речи, питај за њену употребу у језику.*

„речник” савремене математике. Рачун **ZF**, и његово проширење аксиомом избора **ZFC**, представљају оквир да се прецизира семантика (значење) разноврсних формалних система, а посебно за предикатске језике. Сходно томе, у последњем поглављу се уводи појам структуре и разматра се концепт последице, одн. њени синтаксни и семантички аспекти. Књига се завршава фундаметалним резултатима[3] на којима почивају веома важне примене савремене математичке логике у разним областима математике.

[3] теорема о ултрафилтеру, теорема компактности, Ремзијева теорема итд.

Садржај је подељен у пет поглавља.

0. Исказна алгебра: Поднаслов овог поглавља би могао бити *алгебарски идентитети и еквивалентне трансформације*, јер је исказна алгебра изложена аналогно познатим бројевним алгебрама.

1. Математичка индукција: Централно место поглавља заузима 'пар екселанс резоновање' (према речима славног математичара Поенкареа) засновано на принципу математичке индукције. Принцип математичке индукције је изложен у контексту природних бројева, а затим је проширен на формалне граматике и формалне теорије. Једна формална теорија је посебно издвојена – *исказни рачун* Ł.

2. Природна дедукција: Систем природне дедукције изложен је најпре за исказну логику, а затим за тзв. чисту предикатску логику. Интерпетација предикатског језика је поменута само узгредно, као подршка интуитивном разумевању језика. Главно место заузимају правила природне дедукције и њихова употреба, која на својеврстан начин одређује и значење симбола.

3. Теорија скупова: Језик и аксиоме теорије скупова су представљење као заједнички оквир разних математичких дисциплина. Централно место поглавља представља листа основних концепата савремене математике.

4. Заснивање математике: Последње поглавље обједињује сва претходна и поставља основе за многе области математике. Сасвим уопштено говорећи, поглавље описује главна уопштења идеје *бројања*: (1) поређење скупова по кардиналности; (2) могућност да се скупови добро уреде (и тиме *продужи* принцип индукције); (3) изграђивање бројевних структура (рационалних и реалних бројева).

Београд, јун 2023 Аутор