Ленка Главаш

Слободанка Јанковић

СТОХАСТИЧКИ МОДЕЛИ У ОПЕРАЦИОНИМ ИСТРАЖИВАЊИМА

СТОХАСТИЧКИ МОДЕЛИ
У
ОПЕРАЦИОНИМ ИСТРАЖИВАЊИМА

∼ ТЕОРИЈА И ЗАДАЦИ ∽

ЛЕНКА ГЛАВАШ

СЛОБОДАНКА ЈАНКОВИЋ

МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
БЕОГРАД, 2016.

Садржај

Увод

Ова књига намењена је студентима Математичког факултета у Београду на смеру за Статистику, актуарску и финансијску математику, а базирана је на предавањима и вежбама које су ауторке више година држале на предмету Стохастички модели у операционим истраживањима.

Операциона истраживања су дисциплина која користи математичке и рачунарске методе за доношење различитих одлука које се тичу функционисања сложених система. Математичке области значајне за операциона истраживања су оптимизација, теорија вероватноћа, теорија случајних процеса, статистика, теорија игара, теорија графова, теорија одлучивања, симулација. За изучавање и предвиђање понашања сложених система који се, под утицајем случајних фактора, мењају током времена користе се апарат и методе теорије случајних процеса.

Основни циљ овог курса је да упозна читаоца са теоријом масовног опслуживања, која се још назива и теорија редова за чекање. У овој теорији од интереса су модели помоћу којих се могу предвидети различите карактеристике које се односе на системе масовног опслуживања, као што су, на пример, дужина реда у систему и дужина чекања до почетка опслуживања.

Курс има два дела. У првом делу (Главе 1 и 2) изложени су неки елементи теорије случајних процеса који су потребни за изучавање и разумевање теорије масовног опслуживања. То је Пуасонов процес, као најважнији у овом курсу, а затим и процеси Маркова (чији су специјални случајеви Пуасонов процес, процеси чистог размножавања, процеси рађања и умирања) и процеси обнављања.

Изложене су дефиниције и својства функције генератрисе и Лапласове трансформације, које су веома користан апарат за решавање система једначина који се појављују у овој области. Други део курса (Глава 3) посвећен је изучавању различитих система масовног опслуживања.

На крају сваког поглавља налази се списак са одабраним задацима из одговарајуће области. Поједини задаци имају име које је подвучено и под којим су познати као проблеми у теорији.

Рукопис књиге пажљиво су прочитали рецензенти проф. др Павле Младеновић и др Јован Вукмировић и дали низ корисних примедби и сугестија на чему им се ауторке посебно захваљују.

Одавде следи да је расподела дужине боравка у систему за клијенте другог ранга једнака

$$P[\xi_2 \leq x] = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_0 \cdot (1 - e^{-(\lambda_1+\mu_2)x}), & x \geq 0. \end{cases}$$

Пример. Сада ћемо да изложити једну могућу примену оваквих система масовног опслуживања, односно једну њихову могућу интерпретацију. Системи који врше опслуживање подложни су кваровима. Ситуација са којом се стално срећемо је да систем, или прибор, који врши опслуживање може да се квари. У случају квара сам прибор за опслуживање треба да се опслужује, односно да се поправља. Претходни модел са приоритетом може да се интерпретира и као модел система масовног опслуживања код којег може да се квари и сам канал за опслуживање (односно прибор којим се врши опслуживање). Јасно је да поток кварова има приоритет и да кад се канал поквари, прекида се опслуживање клијента које је у току. Систем који смо претходно разматрали могао је да се поквари и у току рада и када је слободан.

3.8 Мреже система масовног опслуживања

Системи масовног опслуживања који су до сада разматрани били су такви да је у њима сваки клијент пролазио кроз само једну фазу опслуживања. Овде ћемо да разматрамо мреже система масовног опслуживања (*queuing networks*), односно системе са вишефазним опслуживањем. Код оваквих система клијент се опслужује на више места (чворова). Тако можемо да говоримо о *мрежи чворова*, где сваки чвор представља један систем масовног опслуживања (који може бити и вишеканални, са чекањем, итд). У општем случају клијенти улазе у мрежу у различитим тачкама, чекају у реду за опслуживање и, пошто су опслужени у једном чвору, прелазе на други чвор ради даљег опслуживања. Овакви системи, који се састоје од групе чворова за опслуживање, код којих поток клијената који одлази из једног чвора чини улазни поток за друге чворове, појављује се у различитим реалним ситуацијама у вези са транспортом, компјутерским системима и услужним делатностима као што су болнице, авионски терминали и др.

Сада ћемо да размотримо најпростији систем овог типа, који се састоји од два чвора (tandem queues) повезаних на следећи начин

$$\lambda \longrightarrow (\text{чвор } 1) \longrightarrow (\text{чвор } 2) \longrightarrow .$$

Овде је приказана мрежа која се састоји од два чвора за коју претпостављамо да у чвор 1 долази Пуасонов поток клијената са интензитетом λ. Чвор 1 има један канал за опслуживање, код којег дужина времена опслуживања има експоненцијалну расподелу са параметром μ. Чвор 1 је систем $M|M|1$ са чекањем. Чвор 2 има такође један канал за опслуживање, а дужина времена опслуживања има такође експоненцијалну расподелу са параметром μ. Претпоставља се да су све променљиве, које су овде поменуте, независне.

Основни проблем који ћемо да разматрамо у вези са овом мрежом је да се нађе расподела дужине интервала времена између узастопних долазака клијената у чвор 2, што је еквивалентно налажењу расподеле дужине интервала времена између узастопних одлазака клијената из чвора 1.

Означимо са X случајну променљиву која представља време које протекне између узастопних излазака клијената из чвора 1. Њена функција расподеле је

$$R(t) = P[X \leq t].$$

Овде разликујемо два случаја који се тичу тренутка када клијент напушта чвор 1:

1. у чвору 1 постоји клијент који је тренутно примљен на опслуживање (догађај A),

2. чвор 1 остаје празан по одласку клијента (догађај B).

У првом случају време после којег клијент из чвора 1 напушта тај чвор има експоненцијалну расподелу са параметром μ. У другом случају до одласка следећег клијента из чвора 1 требало би чекати време које се састоји из два дела: време до доласка следећег клијента и време његовог опслуживања. Пошто су те две променљиве независне, расподела њиховог збира једнака је конволуцији одговарајућих расподела.

Чвор 1 је једноканални систем масовног опслуживања са чекањем, а формуле за број клијената у том систему у стационарном режиму добијамо тако што у у формулама за m-канални систем ставимо да је $m = 1$. Формуле које важе за m-канални систем су следеће (где је са ρ означен количник $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ и важи да је $\rho < m$):

$$P_k = \frac{\rho^k}{k!} P_0, \qquad 1 \leq k < m$$

$$P_k = \frac{\rho^k}{m! m^{k-m}} P_0, \quad k \geq m$$

$$P_0^{-1} = \sum_{k=0}^{m} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^{m+1}}{m!(m-\rho)}.$$

Када је $m = 1$, имамо да је

$$P_0^{-1} = 1 + \rho + \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{1}{1-\rho},$$

одакле добијамо да је

$$P_0 = 1 - \rho; \qquad P_k = \rho^k \cdot P_0 = \rho^k \cdot (1-\rho), \quad k = 0, 1, 2, \dots.$$

На основу ових формула имамо да су вероватноће да први чвор није остао празан по одласку клијента (догађај A), односно да је први чвор остао празан по одласку клијента (догађај B) једнаке:

$$P(A) = 1 - P_0 = \rho, \qquad P(B) = P_0 = 1 - \rho.$$

Означимо са X случајну променљиву која представља интервал времена између узастопних излазака клијената из чвора 1. Њену функцију расподеле добијамо на следећи начин

$$\begin{aligned} P[X \leq t] &= P[X \leq t, A] + P[X \leq t, B] \\ &= P[A] \cdot P[X \leq t | A] + P[B] \cdot P[X \leq t | B] \\ &= \rho \cdot (1 - e^{-\mu t}) + (1-\rho) \int_0^t (1 - e^{-\mu(t-u)}) \lambda e^{-\lambda u} du. \end{aligned}$$

Вероватноћу да интервал времена између узастопних излазака клијената из чвора 1 буде мањи од t, под условом да је први чвор остао празан по одласку клијента ($P[X \leq t|B]$), добили смо тако што смо проинтегралили по свим могућим временима доласка новог клијента у систем $u \leq t$ и претпоставили да ће дужина његовог опслуживања бити мања од $t-u$.

Ову функцију расподеле ћемо да нађемо помоћу Лапласове трансформације. Када помножимо леву и десну страну претходне једнакости са e^{-st} и интегралимо од 0 до $+\infty$, добијамо

$$\int_0^\infty e^{-st} P[X \leq t] dt =$$

$$= \rho \int_0^\infty e^{-st}(1-e^{-\mu t})dt + (1-\rho)\int_0^\infty e^{-st}\int_0^t (1-e^{-\mu(t-u)})\lambda e^{-\lambda u} du dt$$

$$= \rho\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{\mu+s}\right) + (1-\rho)\int_0^\infty \int_u^\infty e^{-su} e^{-s(t-u)}(1-e^{-\mu(t-u)})\lambda e^{-\lambda u} dt du$$

$$= \rho\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{\mu+s}\right) + (1-\rho)\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda u} e^{-su} du \int_u^\infty e^{-s(t-u)}(1-e^{-\mu(t-u)})dt$$

$$= \rho\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{\mu+s}\right) + (1-\rho)\int_0^\infty e^{-su}\lambda e^{-\lambda u} du \int_0^\infty e^{-sy}(1-e^{-\mu y})dy$$

$$= \rho\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{\mu+s}\right) + (1-\rho)\frac{\lambda}{\lambda+s}\cdot\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{\mu+s}\right)$$

$$= \frac{\rho\mu}{s(\mu+s)} + (1-\rho)\frac{\lambda}{\lambda+s}\cdot\frac{\mu}{s(\mu+s)} = \frac{\mu}{\mu+s}\left(\frac{\rho}{s} + \frac{1-\rho}{s}\cdot\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)$$

$$= \frac{\mu}{\mu+s}\cdot\frac{\lambda s + \lambda\mu}{s\mu(\lambda+s)} = \frac{\lambda}{s(\lambda+s)}.$$

Још остаје да се примети да одавде следи да X има експоненцијалну расподелу са параметром λ. Заиста,

$$\int_0^\infty e^{-st}(1-e^{-\lambda t})dt = \frac{1}{s} + \frac{1}{\lambda+s} = \frac{\lambda}{s(\lambda+s)}.$$

Овим смо показали да је поток клијената који одлазе из чвора 1 исти као и поток клијената који долазе у чвор 1, тј. интервали времена између узастопних одлазака из чвора 1 имају експоненцијалну расподелу са параметром λ. $\square$

Важи и више – ако би био у питању $M|M|m$ систем у стационарном режиму са Пуасоновим улазним потоком са параметром λ и експоненцијално расподељеном дужином времена опслуживања (са параметром μ), опет би излазни поток из тог система био Пуасонов поток са параметром λ.

Из ове особине следи да и чвор 2 представља систем $M|M|1$. Дакле, ако редно сложимо неколико чворова масовног опслуживања, са Пуасоновим улазним потоком на чвор 1 и експоненцијалном дужином трајања времена опслуживања, за сваки чвор важе исте особине. То значи да такве мреже можемо да изучавамо тако што их разложимо на појединачне чворове, па сваки испитујемо појединачно.

Овај проблем је за произвољне мреже система масовног опслуживања испитивао Џексон (James Richard Jackson, 1924–2011. г), које су по њему добили име. Он је разматрао мрежу система масовног опслуживања са N чворова, где се за чвор i, $i = 1, 2, \ldots, N$, претпоставља да се састоји од m_i канала, са експоненцијалном расподелом дужине трајања опслуживања (са параметром μ_i) и са спољним улазним потоком који је Пуасонов са интензитетом γ_i. Када је $N = 1$, имамо обичан $M|M|m$ систем.

Клијент, који напушта i-ти чвор, са вероватноћом r_{ij} иде на j-ти чвор, $r_{ij} \geq 0$. Вероватноћа да, после опслуживања на i-том чвору, клијент напусти мрежу и не врати се у њу је једнака $1 - \sum_{j=1}^{N} r_{ij}$. Проблем који је овде од интереса је да се нађе интензитет улазног потока клијената за сваки чвор. За то је потребно да се просумирају Пуасонови потоци који долазе споља и потоци који долазе са других чворова, који нису обавезно Пуасонови. Означимо са λ_i интензитет потока који улази у i-ти чвор. Онда важи:

$$\lambda_i = \gamma_i + \sum_{j=1}^{N} \lambda_j r_{ji}.$$

Да би постојала стационарна расподела, за сваки чвор треба да важи да је $\frac{\lambda_i}{\mu_i} < m_i$. Овде описана мрежа је такозвана отворена мрежа, која има улаз клијената из спољног света. Џексон је доказао да се сваки чвор унутар овакве мреже понаша као независан систем масовног опслуживања са улазним Пуасоновим потоком са параметром λ_i. У општем случају улазни поток не мора бити Пуасонов.

Стање мреже са N чворова описује се вектором $(k_1, k_2, \ldots, k_N)$ где је k_i укупан број клијената у i-том чвору. Џексон је показао следеће: ако са $P(k_1, k_2, \ldots, k_N)$ означимо стационарну вероватноћу тог стања, а са $P_i(k_i)$ маргиналну расподелу да у стационарном режиму у i-том чвору има k_i клијената, онда важи да је

$$P(k_1, k_2, \ldots, k_N) = P_1(k_1) \cdot P_2(k_2) \cdot \cdots \cdot P_N(k_N),$$

где су $P_i(k_i)$ стационарне вероватноће за систем $M|M|m_i$.

Мрежа система масовног опслуживања назива се затвореном ако она нема ни улаз ни излаз. У таквој мрежи стално се налазе K клијената, који циркулишу међу чворовима. Оваква мрежа би одговарала случају код којег је $\gamma_i = 0$ и $\sum_{j=1}^{N} r_{ij} = 1$ у Џексоновој мрежи. Постоји расподела вектора $P(k_1, k_2, \ldots, k_N)$ за затворене мреже, али код затворених мрежа не постоји решење у облику производа, јер међу компонентама вектора $(k_1, k_2, \ldots, k_N)$ постоји следећа зависност: $\sum_{j=1}^{N} k_j = K$.

ЗАДАЦИ

3.1 Складиште има једну линију за истовар, на коју камиони стижу у складу са Пуасоновим процесом у временским интервалима очекиване дужине $50\,min$. Количина времена потребног да се истовари роба из камиона је експоненцијално расподељена са очекивањем $40\,min$. Одредити мере перформансе овог система опслуживања.

Литература

[1] Søren Asmussen. *Applied Probability and Queues.* Applications of mathematics. Springer-Verlag, New York, 2003.

[2] U. Narayan Bhat. *An Introduction to Queueing Theory: Modeling and Analysis in Applications.* Statistics for Industry and Technology. Birkhäuser, Basel, 2015.

[3] Sanjay K. Bose. *An Introduction to Queueing Systems.* Springer US, 2002.

[4] David R. Cox. *Renewal Theory.* Methuen's Monographs on Applied Probability and Statistics. Methuen & Co., London, 1962.

[5] David R. Cox and Walter L. Smith. *Queues.* Chapman & Hall/CRC Monographs on Statistics & Applied Probability. Taylor & Francis, 1991.

[6] Richard Durrett. *Essentials of Stochastic Processes.* Springer Texts in Statistics. Springer New York, 2012.

[7] William Feller. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, volume 1. Wiley, New York, London, Sydney, 1968.

[8] B. V. Gnedenko and I. N. Kovalenko. *Introduction to Queueing Theory.* Mathematical Modeling. Birkhäuser, Boston, MA, 1989.

[9] James R. Jackson. Networks of waiting lines. *Operations Research*, 5 (4):518–521, 1957.

[10] James R. Jackson. Jobshop-like queueing systems. *Management Science*, 10(1):131–142, 1963.

[11] Samuel Karlin and Howard M. Taylor. *A First Course in Stochastic Processes*. Academic Press, 2012.

[12] John G. Kemeny and James Laurie Snell. *Finite Markov Chains*. Undergraduate texts in mathematics. Springer, New York, 1976.

[13] John G. Kemeny, James Laurie Snell, and Anthony W. Knapp. *Denumerable Markov Chains*. Graduate texts in mathematics. Springer, New York, 1976.

[14] A. Y. Khintchine. *Mathematical Methods in the Theory of Queueing*. Griffin's Statistical Monographs & Courses. Hafner Publishing Co., New York, 1969.

[15] Leonard Kleinrock. *Queueing Systems*, volume I: Theory. Wiley Interscience, 1975. (Published in Russian 1979; Published in Japanese 1979; Published in Hungarian 1979; Published in Italian 1992).

[16] Leonard Kleinrock. *Queueing Systems*, volume II: Computer Applications. Wiley Interscience, 1976. (Published in Russian 1979; Published in Japanese 1979).

[17] Leonard Kleinrock and Richard Gail. *Queueing Systems: Problems and Solutions*. Wiley, New York, 1996.

[18] Fermin Mallor, Edward Omey, and Stefan Van Gulck. *Introduction to the Modelling and Analysis of Queuing Systems*. Universidad Pública de Navarra, 2010.

[19] Павле Младеновић. *Вероватноћа и статистика*. Математички факултет, Београд, 2008.

[20] Павле Младеновић. *Елементи актуарске математике*. Математички факултет, Београд, 2014.

[21] Mark A. Pinsky and Samuel Karlin. *An Introduction to Stochastic Modeling*. Academic Press, Amsterdam, 2011.

[22] Sidney I. Resnick. *Adventures in Stochastic Processes*. Birkhäuser, Boston, MA, 1992.

[23] Sheldon M. Ross. *Introduction to Probability Models (10th Edition)*. Academic Press, Boston, MA, 2010.

[24] Thomas L. Saaty. *Elements of Queueing Theory: with Applications.* McGraw-Hill, New York, Toronto, London, 1961.

[25] William J. Stewart. *Probability, Markov Chains, Queues, and Simulation: The Mathematical Basis of Performance Modeling.* Princeton University Press, Princeton (N.J.), Oxford, 2009.

[26] Howard M. Taylor and Samuel Karlin. *An Introduction to Stochastic Modeling.* Academic Press, San Diego, CA, 1998.

[27] Henk C. Tijms. *A First Course in Stochastic Models.* Wiley, New York, 2003.