

Игор Уљаревић

ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ

Увод

Математички факултет
Београд 2023.

др Игор Уљаревић

ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ - УВОД

Издавач: Универзитет у Београду
Математички факултет
Студентски трг 16

За издавача: др Зоран Ракић, декан

Издавачки одбор: др Зоран Петровић, предсједник
др Мирјана Ђорић
др Предраг Јаничић
др Милош Арсеновић
др Бојан Арбутина

Рецезенти: др Борислав Гајић
др Јелена Катић

Обрада текста: аутор

Штампа и повез: Донат Граф, Београд

Тираж: 50

СИР - Каталогизација у публикацији
Народна библиотека Србије, Београд

517.9(075.8)

УЉАРЕВИЋ, Игор, 1988-

Диференцијалне једначине : увод / Игор Уљаревић. - 1. изд. - Београд: Универзитет, Математички факултет, 2023 (Београд: Донат Граф). - 100 стр. : граф. прикази; 25 см

Тираж 50. - Библиографија: стр. 99-100.

ISBN 978-86-7589-180-2

а) Диференцијалне једначине

COBISS.SR-ID 129436681

ISBN 978-86-7589-180-2

© 2023. Аутор

Сва права су задржана. Ниједан дио ове публикације не може бити репродуко-
ван нити смјештен у систем за претраживање или трансмитовање у било ком об-
лику, електронски, механички, фотокопирањем, снимањем или на други начин,
без претходне писмене дозволе аутора.

Предговор

Ова књига је намењена студентима који се први пут сусрећу са диференцијалним једначинама и који имају солидно предзнање из линеарне алгебре и анализе функција више промјенљивих. Може да послужи као уџбеник за уводни курс о диференцијалним једначинама или као литература за самостално учење.

Вјерујем у креативан и динамичан приступ учењу. Стога сам покушао да читаоца измјестим из улоге пасивног посматрача и да од њега направим протагонисту ове књиге. Овај покушај се прије свега огледа у донекле нестандардном излагању за један уџбеник из математике. Књига је скоро у потпуности лишена доказа. Умјесто доказа дат је низ задатака са упутствима који ка доказима воде.

Захваљујем талентованим студентима Математичког факултета Универзитета у Београду којима сам имао част да предајем диференцијалне једначине. Захваљујем Јелени Катић и Маши Ђорић на помоћи при обради текста у \LaTeX -у. Захваљујем Стефану Миленковићу на указаним пропустима. Захваљујем рецензентима и издавачком одбору на труду и на корисним сугестијама.

У Београду, јуна 2023.

И. Уљаревић

Садржај

Предговор	1
ГЛАВА 1. Терминологија	3
ГЛАВА 2. Мотивација	5
1. Примјер 1: Радиоактивни распад	6
2. Примјер 2: Кермак-Мекендриков епидемиолошки модел	8
3. Примјер 3: Електрично осцилаторно коло	9
ГЛАВА 3. Векторско поље и његов ток	13
1. Механичка интерпретација	13
2. Векторска поља и обичне диференцијалне једначине	15
3. Теореме постојања	18
4. Доказ Пеанове теореме	19
5. Доказ Пикарове теореме	21
6. Максимална интегрална крива	23
7. Доказ леме о постојању максималне интегралне криве	25
8. Доказ теореме о продужењу	27
9. Ток векторског поља	29
10. Гронвалова неједнакост	30
11. Доказ теореме о непрекидности	32
12. Доказ леме о отворености домена тока	33
13. О рјешењу линеарне нехомогене интегралне једначине	35
14. Доказ теореме о глаткости тока	38
15. Доказ теореме о току векторског поља и фамилији дифеоморфизама	40
16. Ток аутономног векторског поља	41
17. Формуле за композицију токова и за инверз тока	42

ГЛАВА 4. Линеарни системи	45
1. Доказ теореме о структури простора интегралних кривих линеарног векторског поља	46
2. Експонент линеарног пресликања	47
3. Израчунавање експонента линеарног пресликања	49
4. Особине експонента линеарног пресликања	54
5. Експонент Жордановог блока	55
6. Експонент реалног Жордановог блока за комплексну сопствену вриједност	57
7. Линеарне диференцијалне једначине вишег реда са константним коефицијентима	59
8. Доказ теореме о линеарној диференцијалној једначини вишег реда са константним коефицијентима	62
ГЛАВА 5. Теорема о исправљивости векторског поља	67
1. Векторско поље при промјени координата	67
2. Теорема о исправљивости векторског поља	69
3. Доказ теореме о исправљивости векторског поља	71
4. Доказ теореме о глаткој еквивалентности линеарних векторских поља	73
5. Лијева заграда	74
6. О неисправљивости диференцијалних 1-форми	76
ГЛАВА 6. Промјена запремине при току	79
1. Доказ теореме о промјени запремине	81
2. Лиувилова формула	82
ГЛАВА 7. Стабилност еквилибријума	85
1. Стабилност по Љапунову и асимптотска стабилност	86
2. Теорема о стабилности еквилибријума	87
ГЛАВА 8. Увод у парцијалне диференцијалне једначине	91
1. Једначина транспорта	91
2. Извођење једначине транспорта	92
3. Рјешавање једначине транспорта	93
4. Метод карактеристика	94
Литература	99