

Владимир Грујић

ДИФЕРЕНЦИЈАЛНА ТОПОЛОГИЈА



Математички факултет
2024.

др Владимир Грујић

ДИФЕРЕНЦИЈАЛНА ТОПОЛОГИЈА
прво издање, 2024

Рецензенти:

др Свјетлана Терзић, редовни професор, Природно-математички факултет,
Универзитет Црне Горе

др Игор Уљаревић, ванредни професор, Математички факултет,
Универзитет у Београду

Издавач: Математички факултет, Универзитет у Београду
Студентски трг 16, 11158 Београд, тел.(+381)011 2027 801, matf@matf.bg.ac.rs

За издавача: др Зоран Ракић, декан

CIP-Каталогизација у публикацији
Народна библиотека Србије, Београд

515.16(075.8)

ГРУЈИЋ, Владимир, 1969-

Диференцијална топологија / Владимир Грујић. - 1.изд. - Београд:
Универзитет, Математички факултет, 2024 (Београд: Donat Graf). -
180стр. : илустр. ; 25cm

Тираж 100.-Напомене и библиографске референце уз текст.-
Библиографија: стр. 180

ISBN 978-86-7589-189-5

а) Тополошке многострукости

COBISS.SR-ID 147035401

Обрада текста: аутор

Пртежи и корице: аутор

Штампа и повез: Donat Graf, Београд

Тираж: 100 примерака

©Математички факултет, 2024

Сва права су задржана. Ниједан део ове публикације не може бити репродукован нити смештен у систем за претраживање и трансмитовање у било ком облику, електронски, механички, фотокопирањем, снимањем или на други начин, без претходне писмене дозволе издавача.

Садржај

Предговор	1
Глава 1. Тополошке многострукости	4
1. Тополошке особине многострукости	5
2. Тополошке подмногострукости	9
3. Неке тополошке конструкције	10
Глава 2. Глатке многострукости	16
1. Прамен глатких функција	21
1.1. Глатко разбијање јединице	22
2. Тангентно и котангентно раслојење	25
2.1. Тангентни и котангентни простор	25
2.2. Тангентно и котангентно раслојење	28
2.3. Векторска и ковекторска поља	29
2.4. Криве на многострукостима	31
2.5. Једнопараметарске групе дифеоморфизама	31
3. Глатка пресликавања многострукости	32
3.1. Локална структура глатких пресликавања	34
3.2. Имерзије и субмерзије	38
3.3. Сардова теорема	40
4. Глатке подмногострукости	42
4.1. Витнијеве теореме о улагању	43
4.2. Тангентни простор подмногострукости	45
4.3. Цеваста околина	46
5. Трансверзалност	51
5.1. Струје и струјна раслојења	51
5.2. Топологија простора глатких пресликавања	55
5.3. Трансверзалност	56
6. Глатке апроксимације	58
7. Примери глатких многострукости	60
Глава 3. Раслојења	64
1. Глатка раслојења	64
1.1. Морфизми раслојења	66
1.2. Раслојења и субмерзије	70
2. Векторска раслојења	71

2.1. Сечења векторских раслојења	75
3. Операције са векторским раслојењима	77
3.1. Подраслојење векторског раслојења	77
3.2. Количник векторских раслојења	78
3.3. Витнијева сума	78
3.4. Дуално раслојење	80
3.5. Коњуговано раслојење	81
3.6. Тензорски производ	81
3.7. Метрика на векторском раслојењу	82
3.8. Нормално подраслојење	83
3.9. Комплексификација и реалификација	85
4. Класификација векторских раслојења	88
4.1. Хомотопска непроменљивост	88
4.2. Квачење	94
4.3. Универзално раслојење	96
Глава 4. Диференцијалне форме	99
1. Оператори диференцирања на формама	100
2. Интеграција на многострукостима	106
3. Де Рамова кохомологија	110
4. Поенкареова лема	115
5. Теорија степена	122
6. Мајер-Вијеторисов низ	130
7. Кинетова формула	135
8. Лере-Хиршов принцип	138
9. Поенкареова дуалност	140
Глава 5. Карактеристичне класе	144
1. Томов изоморфизам	145
2. Теорија пресека	157
2.1. Лефшецова теорема о непокретној тачки	161
3. Ојлерова класа	163
4. Чернове класе	169
5. Понтрјагинове класе	178
Литература	180

Предговор

Диференцијална топологија је топологија у глаткој категорији, односно њени објекти проучавања су глатке многострукости и глатка прсликавања међу њима, а основна питања су везана за њихова глобална својства. Диференцијална топологија лежи у темељима многих модерних области математике у којима је, из тог разлога, познавање њених основних појмова и главних метода и резултата неопходно. Постоји богата, класична и модерна литература у којој се излажу опште и више специфичне теме које спадају у област диференцијалне топологије и које су се временом издвојиле као стандардна и непревазиђена литература својим стилем, прегледношћу и строгошћу излагања. Део из те обимне литературе, који је коришћен у писању ове књиге, је наведен у Литератури. Поред неколико претходних уџбеника и текстова, који су вођени другом намером, ова књига представља први целовит покушај излагања основа диференцијалне топологије на српском језику. Непосредна потреба за оваквом књигом се појавила после увођења више сродних курсева на мастер и докторским студијама на Математичком факултету у Београду. То су Одабрана поглавља диференцијалне топологије на мастер студијама и Диференцијална топологија на докторским студијама студијског програма Математика. Такође је покривен велики део курса Векторска раслојења и карактеристичне класе, међутим у овом случају рад у глаткој категорији не даје потребну општост. Књига је превасходно намењена студентима који су полазници тих курсева. Успешно овладавање садржајима из диференцијалне топологије захтева већ прилично обученог математичара који познаје напредније појмове линеарне алгебре, диференцијалног и интегралног рачуна функција више променљивих, основна својства тополошких простора, као и елементе алгебарске топологије. Поред основне намене, надам се да књига може послужити и свима којима је потребна повремена помоћ диференцијалне топологије у другим областима.

Књига је подељена на пет глава у којима су изложени основни појмови теорије тополошких многострукости, теорије глатких многострукости, теорије глатких векторских раслојења, диференцијалних форми и теорије карактеристичних класа глатких векторских раслојења. У првој, уводној глави се излажу основни појмови и својства тополошких многострукости, посебно паракомпактност и разбијање јединице. У другој глави се уводе главни појмови и технике

глатке категорије. Уводи се појам структуре на многострукости, дефинишу тангентно и котангентно раслојење, описује локална структура глатких пресликавања, посебно имерзија и субмерзија. Затим се дефинише појам глатке подмногострукости и изводе Витнијеве теореме о улагању затворених многострукости. Посебно пажљиво се изводи важна теорема о цевастој околини. Преко појмова струја и струјних раширења описују се Витнијеве топологије на простору глатких пресликавања и уводи појам трансверзалности, који је један од најважнијих принципа у диференцијалној топологији. Изводе се теореме о глаткој апроксимацији које показују да се хомотопске особине глатких многострукости могу проучавати у глаткој категорији. Неколико теорема фундаменталног значаја излазе из оквира стандардног курса и због техничке сложености су само наведене. То су Витнијеве јака теорема о улагању и теорема имерзије, Томова теорема трансверзалности и општа теорема апроксимације глатким пресликавањима.

У трећој глави се уводи категорија глатких раслојења, а затим глатких реалних и комплексних векторских раслојења. Описују се стандардне операције над глатким векторским раслојењима, као што су Витнијева сума, дуално и конјуговано раслојење, тензорски производ и важне операције реалификације и комплексификације. Значај векторских раслојења за топологију многострукости се огледа у њиховој хомотопској непроменљивости. У овом поглављу се излази из глатке у тополошку категорију и показује да је свако тополошко векторско раслојење над паракомпактним простором класификовано пресликавањем у бесконачни Грасманијан.

Диференцијалне форме су најважнији аналитичко-геометријски објекти придружени глатким многострукостима. У четвртој глави су описани оператори диференцирања и интеграција форми на многострукостима, уведена де Рамова кохомологија глатких многострукости са реалним коефицијентима и изведени основни алгебарско-тополошки резултати ове теорије. Детаљно су изведене Поенкареове леме о хомотопској непроменљивости де Рамовете кохомологије. Приказује се теорија степена и њене последице, посебно Поенкаре-Хопфова теорема о индексу векторског поља. Помоћу Мајер-Вијеторисовог низа, основне технике за рачунање де Рамовете кохомологије преко отворених покривача, доказане су Кинетова формула, Лере-Хиршов принцип и Поенкареова дуалност и као специфично тополошко својство показано да изотопно смештеним подмногострукостима одговарају кохомологне Поенкареове дуалне форме.

У последњој, петој глави приказана је теорија реалних карактеристичних класа глатких векторских раслојења. Помоћу Томовог изоморфизма и класе оријентације оријентисаног глатког векторског раслојења конструисана је Томова класа и показано да се она може реализовати као Поенкареов дуал базе раслојења у тоталном простору. Изложена је теорија пресека глатких подмногострукости комплементарних димензија и детаљно доказана интегрална формула за индекс пресека, као и примена у класи Лефшецових пресликавања.

Преко Томове класе раслојења је уведена Ојлерова класа и показано да је интеграл Ојлерове класе тангентног раслојења једнак Ојлеровој карактеристици. Користећи Гизинев низ, индуктивно су дефинисане Чернове класе комплексних глатких раслојења и показано да те класе представљају препреке постојању линеарно независних сечења раслојења. Помоћу принципа цепања показано је да се Чернове класе изражавају као симетрични полиноми у Ојлеровим класама линијских раслојења придруженог раслојења застава. Поглавље је закључено конструкцијом Понтрјагинових класа реалног глатког векторског раслојења као Чернових класа његове комплексификације.

Иако већина појмова има усаглашену терминологију на српском језику, у појединим случајевима је било неопходно пронаћи нови термин или подеснију замену. Набрајање Дефиниција и тврђења у облику Лема, Тврђења и Теорема, као и одвојено набрајање Напомена и Примера је изведено редно у оквиру појединачне главе. Помињање неког математичара је пропраћено кратком биографском напоменом, како би се указало на историјску перспективу. Посебну захвалност изражавам рецензентима професорима др Свјетлани Терзић и др Игору Уљаревићу на труду и времену уложеном у детаљно и пажљиво прегледање првобитног рукописа, чиме су значајно допринели издавању ове књиге.

Надам се да ће област диференцијалне топологије овом књигом постати ближа студентима на српском језику, као и да ће читалац бити мотивисан да настави са изучавањем њених многобројних примена.

У Београду,
априла 2024. године

Аутор