GEOMETRIJA KRIVIH I POVRŠI

Matematički fakultet

Ivan Dimitrijević i Zoran Rakić

Beograd, 2024. godine

Dr Ivan Dimitrijević

Dr Zoran Rakić

GEOMETRIJA KRIVIH I POVRŠI

Prvo izdanje

Izdavač: Matematički fakultet, Studentski trg 16, Beograd

Za izdavača: dr Zoran Rakić, dekan

Izdavački odbor: dr Nebojša Ikodinović, predsednik,

dr Miroslava Antić, dr Bojan Arbutina,

dr Filip Marić i dr PetarMelentijević

Recenzenti: dr Miroslava Antić i dr Jelena Stanković

Korice, obrada teksta i slika: autori

Štampa i povez: Forma B

Tiraž: 1 000 primeraka

ISBN 978 – 86 – 7589 – 188 - 8

Sadržaj

Krive u $\mathbb{R}^n$

2. POVRŠI

3. DODATAK

Predgovor

Knjiga pred vama napisana je u skladu sa važećim programom kursa Geometrija krivih i površi za studente druge godine Matematičkog fakulteta u Beogradu. Mogu je koristiti svi zainteresovani koji žele da savladaju ovu oblast, kao što su npr. studenti fizike, hemije, studenti informacionih tehnologija (orijentisani prema grafici), studenti molekularne biologije, tehničkih fakulteta i napredniji srednjoškolci završne godine. Za razumevanje izloženog materijala pretpostavlja se poznavanje matematičke analize, linearne algebre, analitičke geometrije i nekih osnovnih znanja iz topologije i diferencijalnih jednačina.

U ovom uvodnom kursu u oblast diferencijalne geometrije, cilj autora je da čitaoce upozna sa osnovnim konceptima lokalne diferencijalne geometrije krivih i površi, a manje ćemo insistirati na tehničkim detaljima, kao što su minimalni uslovi na postojanja rešenja nekih jednačina i slično. Izlaganje ove problematike zasnovano je na modernijem pristupu u kojem koristimo jezik linearne algebre, a izbegavamo korišćenje indeksa. U cilju olakšavanja razumevanja osnovnih geometrijskih koncepata, objekata i veza među njima urađen je veći broj slika, primera i zadataka.

U kursevima Analitička geometrija i Osnove geometrije bavili smo se uglavnom geometrijom euklidskog prostora: izučavanjem pravih, ravni, krivih i površi drugog reda, tako da su studenti stekli određeni osećaj i intuiciju za geometriju ravni i prostora. Lokalna diferencijalna geometrija krivih i površi, koja se ponekad naziva i klasična diferencijalna geometrija, je prirodan korak u razvoju geometrije, koji je počeo sa razvojem matematičke analize i linearne algebre. Pod lokalnim svojstvima krivih i površi mislimo na ona svojstva krivih i površi koja zavise od okoline neke tačke krive ili površi. To je i razlog zašto su krive i površi definisane kao slike nekih funkcija koje su dovoljno puta diferencijabilne. Kako je prirodnije krive i površi posmatrati kao skupove tačaka, dajemo vezu između tog pristupa krivama i površima i našeg pristupa. Ideja koja stoji u pozadini ovog izlaganja je da se izučavanje nelinearnih geometrijskih objekata svedu na izučavanja familija tangentnih (vektorskih) prostora, njihovih pokretnih repera, kao i nekih familija linearnih operatora (ili preciznije vektora i linearnih operatora čije komponente su funkcije više parametara). Budući da je cilj autora dosta složen jer kombinuje znanja iz nekoliko matematičkih disciplina, u izlaganju materijala koristili smo neke od osnovnih matematičkih principa kao što su: od posebnog ka opštem, od jednostavnijeg ka složenijem (u izučavanju površi koristimo metode razvijene u izučavanju krivih), kao i uopštenjima raznih objekata i metoda u višim dimenzijama. Takođe, knjiga je pisana tako da pripremi studente koji se opredele za teorijsku matematiku i fiziku, tj. za geometrijske kurseve koji ih očekuju na tom putu tokom osnovnih i master studija: *Diferencijalna geometrija* i *Lijeve grupe*, ali i doktorskih studija iz oblasti Geometrija, *Rimanova geometrija* i *Grupe u Geometriji i druge*.

Knjiga se sastoji od tri glave, a svaka od glava podeljena je u određen broj tačaka koje su posvećene određenim temama. Na kraju prve dve glave nalaze se zadaci u formi dopuna, vežbanja i problema koji doprinose boljem razumevanju osnovnog teksta. Takođe, nakon poslednje glave nalazi se određen broj ispitnih zadataka. Oznake u knjizi su lokalne, tj. brojevi raznih tvrđenja i definicija se odnose na tačku u kojoj se nalaze, a ako se tvrđenje nalazi u nekoj prethodnoj tački, tada se ispred imena tvrđenja nalazi broj te tačke.

U prvom delu prve glave uveden je pojam parametrizovane regularne krive kao funkcije sa otvorenog intervala ('jednodimenzionog' skupa) u prostor veće dimenzije koje zadovoljavaju neke uslove koji odražavaju naše shvatanje krive kao putanje materijalne tačke koja se kreće. Tako npr. geometrijski uslov regularnosti krive znači da kriva u svakoj svojoj tački ima tangentnu liniju ili, ekvivalentno, ne-nula tangentni vektor. Ovu definiciju krive dovodimo u vezu sa krivom kao geometrijskim skupom (neparametrizovane krive u $\mathbb{R}^n$). Uveden je važan pojam prirodne parametrizacije krive. Zatim je dat niz primera krivih u ravni, i do kraja ovog dela bavimo se krivama u ravni. Uveden su osnovni koncepti krivina krive, Freneov reper i Freneove jednačine, i pokazujemo da je unutrašnja geometrija ravanske krive u potpunosti određena njenom funkcijom krivine. Dato je nekoliko primera (analitičkih i numeričkih) obratnog zadatka za ravanske krive, tj. zadataka da iz date funkcije krivine odredimo jednačinu krive. Drugi deo prve glave posvećen je krivama u prostoru $\mathbb{R}^3$, na koje su primenjeni koncepti i prirodna uopštenja iz prvog dela ove glave: uvodimo pojam biregularne krive, Frene – Sereovog repera, pojam torzije, i Frene – Sereovih jednačina za krive u prostoru. Pokazujemo da je regularna prostorna kriva do na izometriju prostora $\mathbb{R}^3$ u potpunosti određena svojim funkcijama krivine i torzije. Na kraju dajemo nekoliko analitičkih rešenja obratnog zadatka, kao i lokalnu kanonsku formu krive. Treći deo prve glave bavi se uopštenjem metoda koje smo razvili u teoriji krivih u prostoru, tj. krivama u $\mathbb{R}^n$. Definišemo pojam Frene – Sereovog repera i jednačina za krive koje su $(n-1)-$regularne i koje ne pripadaju ni jednoj ravni dimenzije manje od n. Za takve krive važi i analogon fundamentalne teoreme za krive, tj. dve takve krive su do na izometriju euklidskog prostora $\mathbb{R}^n$ određene sa svojih $(n-1)-$ funkcija krivina.

Druga glava predstavlja centralni deo ovog teksta i posvećena je lokalnoj teoriji površi. Data je definicija glatke parametrizovane regularne elementarne površi i neparametrizovane površi, slično kao i kod krivih. Regularnost površi geometrijski se manifestuje u postojanju tangentne ravni u svakoj tački površi. Prirodnim uopštenjem pojma elementarne regularne površi dolazimo do jednog od centralnih pojmova savremene matematike i teorijske fizike – pojma glatke mnogostrukosti. U izučavanju geometrije površi korišćena je teorija krivih, pomoću koje su definisani fundamentalni pojmovi: tangentnog vektora, tangentnog prostora i tangentne ravni, i izučavamo njihovu strukturu vektorskog (afinog) prostora. Takođe, uveden je pojam diferencijabilnog preslikavanja površi, kao i tangentnog preslikavanja (diferencijala) u odgovarajućim tačkama. Uvedeni su pojmovi glatkih vektorskih polja duž krive koja pripada površi, vektora normale i orijentabilnosti površi. Po analogiji sa Frene – Sereovim reperom, uvodimo prirodni reper na površi kao jedan fundamentalni algebarski objekat za izučavanje geometrije površi. U drugom delu ove glave uvedena je prva fundamentalna forma površi, koja predstavlja skalarni proizvod i koja određuje unutrašnju geometriju površi. Definisano je Gausovo preslikavanje i izvedene su Gausove jednačine, operator oblika i druga fundamentalna forma površi koja pokazuje kako je površ smeštena u prostor $\mathbb{R}^3$. Uvedeni su koncepti normalne i geodezijske krivine, geodezijskih i asimptotskih linija, glavnih krivina i pravaca, srednje i Gausove krivine. Uopštavajući jednačine Frene – Sera za krive, dobijene su Gaus-Vajngartenove jednačine koje moraju zadovoljavati netrivijalni uslov kompatiblnosti. Na kraju ovog dela druge glave data je fundamentalna teorema (Boneova teorema) za površi, kao i čuvena Gausova teorema Egregium. Poslednji deo ove glave posvećen je konceptu izometrija i lokalnih izometrija površi. Pokazano je da dve lokalno izometrične površi imaju iste prve fundamentalne forme u odgovarajućim tačkama, tj. dve lokalno izometrične površi imaju istu unutrašnju geometriju. Dakle, sve geometrijske veličine lokalno izometričnih površi, kao što su Kristofelovi simboli, Gausova krivina i druge, se podudaraju u odgovarajućim tačkama. Zatim je uveden koncept paralelnog pomeranja tangentnog vektorskog polja duž krive koja pripada površi, i neka svojstva paralelnih tangentnih polja. Na kraju uvodimo pojam kovarijantnog diferenciranja, dokazana su njegova osnovna svojstva i pokazano je kako se pomoću kovarijantnog izvoda mogu karakterisati operator oblika i geodezijske linije, na način koji je pogodniji za uopštenja na mnogostrukosti u višim dimenzijama.

Poslednja glava Dodatak sadrži (bez dokaza) pregled osnovnih pojmova i tvrđenja iz linearne algebre koje koristimo, kratak pregled afine geometrije, pri čemu je akcenat na izometrijama euklidskog prostora, koje koristimo u dokazima jedinstvenosti u fundamentalnim teoremama o krivama u dimenzijama $2, 3$ i n, kao i površima. Treći deo dodatka se odnosi na neke pojmove i svojstva diferencijabilnih funkcija više realnih promenljivih, sa posebnim akcentom na Teoreme o inverznom preslikavanju i implicitnoj funkciji, koje leže u samim osnovama diferencijalne geometrije. U poslednjem delu ove glave navedena je Pikarova teorema o postojanju i jedinstvenosti rešenja sistema običnih diferencijalnih jednačina koje zadovoljavaju početni uslov, koju smo koristili u tekstu. Dokazi svih teorema i tvrdnji iz ove glave mogu se naći u odgovarajućoj literaturi.

Na kraju svake glave ponuđeni su zadaci, koji treba da pomognu čitaocu da što bolje ovlada geometrijom krivih i površi. Zadaci su podeljeni na sledeće grupe: dopune,vežbanja, problemi i zadaci sa ispita. Kao dopune ostavljeni su detalji nekih dokaza, kao i tvrđenja koja upotpunjavaju osnovni tekst. Za vežbanja su uglavnom izabrani neki tipični računski zadaci. Problemi su uglavnom nestandardni i nešto teži zadaci namenjeni posebno zainteresovanim studentima, i na kraju su dati zadaci sa ispita kako bi čitaoci mogli sami da procene koliko i kako su savladali gradivo.

Prijatna nam je dužnost da se zahvalimo svim kolegama koji su doprineli da tekst bude što kvalitetniji, pre svega našim recenzentima prof. Miroslavi Antić i prof. Jeleni Stanković koji su svojim primedbama i sugestijama značajno doprinele kvalitetu udžbenika. Takođe, prilikom izbora teksta i zadataka koristili smo materijale kolega Mirjane Đorić, Miloša Đorića i Alekseja Tužilina. Detaljnjim pregledom jedne od poslednjih verzija ove knjige kolege Branislav Milošević i Tamara Đaković, značajno su smanjili broj grešaka u njoj.

Svima njima najtoplije se zahvaljujemo.

Slike u knjizi su urađene u programu Wolfram Mathematica (broj licence 5223-8184-33G95W).

U Beogradu, april 2024, *Autori*