Кртинић Ђорђе

1

МАТЕМАТИЧКА АНАЛИЗА 1

збирка решених задатака

МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Математички факултет у Београду

МАТЕМАТИЧКА

АНАЛИЗА 1

збирка решених задатака

Друго издање

Б Е О Г Р А Д
2024.

Аутор: *Ђорђе Кртинић*, Математички факултет, Београд

МАТЕМАТИЧКА АНАЛИЗА 1
Збирка решених задатака

Рецензенти: *Зоран Каделбург*, Математички факултет, Београд
Иван Аранђеловић, Машински факултет, Београд

Издавач: Математички факултет, Београд

Обрада текста: *аутор*

Корице: *Александра Гулан*

ISBN: 978-86-7589-190-1
CIP - Каталогизација у публикацији
Народна библиотека Србије, Београд

517.51/.52(075.8)(076) 517.3(075.8)(076)
КРТИНИЋ, Ђорђе, 1976-
Математичка анализа 1 : збирка решених задатака / Ђорђе Кртинић. - 2. изд. - Београд : Математички факултет, 2024 (Београд : Donat Graf). - IV, 191 стр. : граф. прикази, табеле ; 24 cm
Тираж 500.
ISBN 978-86-7589-190-1
а) Теорија функција - Задаци б) Теорија низова и редова - Задаци в) Интеграли - Задаци
COBISS.SR-ID 152962057

Тираж: 500 примерака
Штампа: Donat Graf, Београд

Садржај

Предговор

Збирка је намењена студентима прве године Математичког факултета који прате предмет Анализа 1, али верујем да се може користити и шире. Већина задатака који се налазе у њој су изабрани са испита одржаних у оквиру предмета Анализа 1, Анализа 1А и Анализа 1Б у претходних 20 година, тако да заслуга око оригиналности задатака припада свим људима који су учествовали у припреми ових испита. Наравно, зарад потпуности материје, додата је неколицина задатака који нису били на испитима. Такође, да би се избегло понављање сличних задатака, као и да не би дошло до превеликог обима књиге, направљен је избор задатака, који је углавном до укуса аутора, а делом је на тај избор утицало то који се задаци чешће појављују по испитима (па је на тим местима свесно направљен избор сличних задатака). Треба напоменути и да је, иако је била предвиђена, изостављена материја везана за метричке просторе, будући да је у међувремену ова област постала саставни део испита друге године Математичког факултета.

Искористио бих прилику да се искрено захвалим свим горе поменутим људима. Како је у овом периоду у организацији ових испита учествовао троцифрен број људи, бесмислено је и покушавати поменути их све. Ипак, искористио бих прилику да издвојим своје драге професоре Драгољуба Аранђеловића и Јована Вукмировића, који су оставили огроман печат не само на формирање мог математичког укуса (тако да се у горе поменутом избору налази велики број задатака којима су аутори или они или њихови ученици), него и на данашњи изглед испита из предмета у којима се проучава или користи математичка анализа. Надам се да ће ова књига бар донекле достићи стандарде који су они поставили. Издвојио бих и професора Зорана Каделбурга, коме се и посебно захваљујем, јер је низом корисних сугестија прилично допринео повећању квалитета књиге.

Што се припреме за излазак у штампу тиче, специјалну врсту захвалности заслужили су поједини чланови издавачког одбора Математичког факултета у Београду, који су јасно изграђеним и смисленим правилима која се на исти начин примењују према свима, као и давањем предности математици науштрб формализма, показали колика је оправданост постојања једног таквог одбора, поготово у тренутном саставу (Милош Арсеновић, Олга Атанацковић, Мирјана Ђорић, Предраг Јаничић, Зоран Петровић).

аутор

Београд, март 2017. године

Ђорђе Кртинић

Предговор другог издања

У другом издању исправљене су грешке уочене у првом издању, док се, по питању садржаја, рукопис не разликује пуно од првог издања. Искористио бих прилику да се захвалим свима који су ми указали на пропусте који су направљени у првом издању.

аутор

Београд, јун 2024. године

Ђорђе Кртинић

1. УВОД

1. Израчунати $\operatorname{tg}\Big(\operatorname{arctg}\dfrac{1}{3}+\arcsin\dfrac{1}{3}\Big)$.

Решење. Ако је $a\in\Big(0,\dfrac{\pi}{2}\Big)$ и $\sin a=x$, онда је $\operatorname{tg} a=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. Како је $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)=x$, $\sin(\arcsin x)=x$ за $|x|\leqslant 1$ и $\operatorname{tg}(x+y)=\dfrac{\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y}{1-\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{tg} y}$ за $x,y\in\Big(0,\dfrac{\pi}{2}\Big)$, $x+y\neq\dfrac{\pi}{2}$, следи да је $\operatorname{tg}\Big(\operatorname{arctg}\dfrac{1}{3}\Big)=\dfrac{1}{3}$, $\sin\Big(\arcsin\dfrac{1}{3}\Big)=\dfrac{1}{3}$ и $\operatorname{tg}\Big(\arcsin\dfrac{1}{3}\Big)=\dfrac{\frac{1}{3}}{\sqrt{1-\frac{1}{9}}}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$, па је

$$\operatorname{tg}\Big(\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\arcsin\frac{1}{3}\Big)=\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{2\sqrt{2}}}{1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}}=\frac{27+20\sqrt{2}}{71}.$$

2. Доказати да, ако је $x,y\in[-1,1]$ и, притом, $xy\geqslant 0$ или $x^2+y^2\leqslant 1$, важи

$$\arcsin x-\arcsin y=\arcsin\Big(x\cdot\sqrt{1-y^2}-y\cdot\sqrt{1-x^2}\Big).$$

Решење. Мора бити $x,y\in[-1,1]$. Ако је $\alpha=\arcsin x$ и $\beta=\arcsin y$, следи $\cos\alpha=\sqrt{1-x^2}$ и $\cos\beta=\sqrt{1-y^2}$ (јер је слика функције $\arcsin x$ једнака $\big[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\big]$, а $\cos x$ је ненегативна на том интервалу), па је

$$\sin(\alpha-\beta)=x\cdot\sqrt{1-y^2}-y\cdot\sqrt{1-x^2}.$$

Ако је $|\alpha-\beta|\leqslant\frac{\pi}{2}$, следи и тврђење задатка. Међутим, ако је $xy\geqslant 0$, ово је тривијално (онда и α и β припадају интервалу дужине $\frac{\pi}{2}$). Иначе, нека је без умањења општости $\beta<0\leqslant\alpha$, онда је $\alpha-\beta\leqslant\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow\frac{\pi}{2}\geqslant\frac{\pi}{2}-\alpha\geqslant-\beta>0$, па како је $\sin t$ монотоно растућа на $\big[0,\frac{\pi}{2}\big]$, последње је еквивалентно са $\cos\alpha\geqslant\sin(-\beta)\Leftrightarrow\sqrt{1-x^2}\geqslant -y>0\Leftrightarrow\big(x^2+y^2\leqslant 1\wedge y<0<x\big)$. Будући да је случај $x^2+y^2\leqslant 1$, $x<0<y$ аналоган, следи тврђење задатка.

3. Нека је низ $(a_n)_{n\geqslant 1}$ дефинисан са
(а) $a_1=6$, $a_2=14$, $a_3=36$, $a_{n+3}=6a_{n+2}-11a_{n+1}+6a_n$. Доказати да је $a_n=1+2^n+3^n$ за свако $n\geqslant 1$.
(б) $a_1=1$, $a_2=8$, $a_3=27$, $a_{n+3}=3a_{n+2}-3a_{n+1}+a_n$. Доказати да је $a_n=n^3$ за свако $n\geqslant 1$.

Решење. (а) Важи $6=a_1=1+2+3$, $14=a_2=1+2^2+3^2$, $36=a_3=1+2^3+3^3$ (база индукције). Ако је тврђење тачно за a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, следи

2. НИЗОВИ

1. Испитати конвергенцију и у случају конвергенције одредити граничну вредност низа $(a_n)_{n\geqslant 0}$ дефинисаног са $a_0 \in \mathbb{R}$, $a_{n+1} = \dfrac{2a_n}{a_n^2+1}$ за $n \in \mathbb{N}_0$.

Решење. Ако је $a_0 = 0$, онда је $a_n = 0$ за свако $n \in \mathbb{N}$ (индукција), па дати низ конвергира и важи $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Ако је $a_0 > 0$, индукцијом се лако показује да је $a_n > 0$. Такође је $a_{n+1} = \frac{2a_n}{1+a_n^2} = 1 - \frac{(1-a_n)^2}{1+a_n^2} \leqslant 1$ за $n \geqslant 0$. Из $a_{n+1} - a_n = \frac{a_n - a_n^3}{1+a_n^2} = \frac{a_n}{1+a_n^2}(1-a_n^2)$ и претходно показаног (тј. да су, сем можда a_0, сви чланови датог низа у $[0,1]$), следи да је дати низ (почев од a_1) неопадајући. Како је он и ограничен одозго, постоји $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ и за њега важи $a = \dfrac{2a}{1+a^2}$ (што се добија преласком на граничну вредност у датој рекурентној вези, користећи непрекидност функције $x \to \frac{2x}{1+x^2}$). Решење дате једначине је $a \in \{-1, 0, 1\}$. Како је низ $(a_n)_{n\geqslant 1}$ неопадајући низ бројева из интервала $(0,1]$, мора бити $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

Ако је $a_0 < 0$, нека је $b_n = -a_n$ за свако $n \in \mathbb{N}_0$. Онда је $b_0 > 0$ и $b_{n+1} = \frac{2b_n}{1+b_n^2}$ за $n \geqslant 0$, па по претходном следи $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$, тј. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -1$.

2. Испитати конвергенцију и у случају конвергенције одредити граничну вредност низа $(a_n)_{n\geqslant 1}$ дефинисаног са $a_1 \geqslant 0$, $a_{n+1} = \dfrac{2a_n}{a_n+1}$ за $n \in \mathbb{N}$.

Решење. Нека је $b_{n+1} = 2b_n$, $c_{n+1} = b_n + c_n$ за $n \in \mathbb{N}$, $b_1 = a_1$, $c_1 = 1$. Дати низови су, очигледно, добро дефинисани и низ $(c_n)_{n\geqslant 1}$ је низ позитивних бројева. Тада је добро дефинисан низ $\left(\frac{b_n}{c_n}\right)_{n\geqslant 1}$ и важи $a_n = \frac{b_n}{c_n}$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Елиминацијом се из горњег система рекурентних једначина добија $c_{n+2} - 3c_{n+1} + 2c_n = 0$, одакле је $c_n = A + B\cdot 2^n$, $b_n = B \cdot 2^n$. Уврштавањем почетних услова, добија се $c_n = (1-a_1) + a_1 \cdot 2^{n-1}$, $b_n = a_1 \cdot 2^{n-1}$, тј. $a_n = \dfrac{a_1 \cdot 2^{n-1}}{(1-a_1) + a_1 \cdot 2^{n-1}}$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Ако је $a_1 = 0$, онда је низ $(a_n)_{n\geqslant 1}$ константно једнак нули, па постоји његова гранична вредност и важи $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Ако је $a_1 \neq 0$, за $n \in \mathbb{N}$ важи $a_n = \dfrac{1}{1 + \frac{1-b_1}{b_1} \cdot \frac{1}{2^{n-1}}}$, па постоји гранична вредност низа $(a_n)_{n\geqslant 1}$ и важи

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 + \frac{1-b_1}{b_1} \cdot \frac{1}{2^{n-1}}} = \frac{1}{1 + \frac{1-b_1}{b_1} \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^{n-1}}} = 1.$$

3. ОДРЕЂИВАЊЕ ГРАНИЧНИХ ВРЕДНОСТИ

1. Наћи $\lim\limits_{n\to\infty}\ln(1+e^n)\cdot\ln\Big(\dfrac{n-1}{n+1}\Big)$.

Решење. Како је $\ln(1+e^n)\ln\Big(\frac{n-1}{n+1}\Big)=\Big(\ln e^n+\ln\Big(1+\frac{1}{e^n}\Big)\Big)\cdot\ln\Big(1-\frac{2}{n+1}\Big)\sim n\cdot\Big(-\frac{2}{n+1}\Big)=-\frac{2n}{n+1}\sim -2$ кад $n\to\infty$, следи $\lim\limits_{n\to\infty}\ln(1+e^n)\cdot\ln\Big(\frac{n-1}{n+1}\Big)=-2$.

2. Израчунати $\lim\limits_{n\to\infty} n\Big(\dfrac{\sqrt[n]{e}+1}{\sqrt[n]{e}-1}-2n\Big)$.

Решење. Како $\frac{1}{n}\to 0$ кад $n\to\infty$, следи $e^{\frac{1}{n}}=1+\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{6n^3}+o\Big(\frac{1}{n^3}\Big)$, па је

$$\begin{aligned}\Big(e^{\frac{1}{n}}-1\Big)^{-1} &= n\cdot\Big(1+\Big(\tfrac{1}{2n}+\tfrac{1}{6n^2}+o\Big(\tfrac{1}{n^2}\Big)\Big)\Big)^{-1}=n\cdot\Big[1-\Big(\tfrac{1}{2n}+\tfrac{1}{6n^2}\\ &\quad+o\Big(\tfrac{1}{n^2}\Big)\Big)+\Big(\tfrac{1}{2n}+\tfrac{1}{6n^2}+o\Big(\tfrac{1}{n^2}\Big)\Big)^2+o\Big(\Big(\tfrac{1}{2n}+\tfrac{1}{6n^2}+o\Big(\tfrac{1}{n^2}\Big)\Big)^2\Big)\Big]\\ &= n\cdot\Big[1-\tfrac{1}{2n}+\tfrac{1}{n^2}\cdot\Big(-\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{4}\Big)+o\Big(\tfrac{1}{n^2}\Big)\Big],\ \text{кад } n\to\infty,\ \text{одакле је}\\ \frac{\sqrt[n]{e}+1}{\sqrt[n]{e}-1}-2n &= \Big(2+\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}+o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\Big)\cdot n\cdot\Big(1-\frac{1}{2n}+\frac{1}{12n^2}+o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\Big)\\ &\quad -2n=2n+\frac{1}{6n}+o\left(\frac{1}{n}\right)-2n=\frac{1}{6n}+o\left(\frac{1}{n}\right),\ \text{кад } n\to\infty,\end{aligned}$$

односно $\lim\limits_{n\to\infty} n\Big(\dfrac{\sqrt[n]{e}+1}{\sqrt[n]{e}-1}-2n\Big)=\lim\limits_{n\to\infty}\Big(\dfrac{1}{6}+o(1)\Big)=\dfrac{1}{6}$.

3. Израчунати $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\Big(\Big(1+\dfrac{1}{n+1}\Big)^{n+1}-\Big(1+\dfrac{1}{n}\Big)^n\Big)$.

Решење. Како је

$$\begin{aligned}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n &= e^{n\ln(1+\frac{1}{n})}=e^{1-\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n^2}+o(\frac{1}{n^2})}\\ &= e\cdot\Big(1-\frac{1}{2n}+\frac{11}{24n^2}+o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\Big)\end{aligned}$$

кад $n\to\infty$, следи да за $n\to\infty$ важи

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty} n^2\Big(\Big(1+\frac{1}{n+1}\Big)^{n+1}-\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n\Big)\\ &\quad= en^2\cdot\left(1-1-\frac{1}{2(n+1)}+\frac{1}{2n}+\frac{11}{24(n+1)^2}-\frac{11}{24n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\ &\quad= en^2\cdot\left(\frac{1}{2n(n+1)}-\frac{11(2n+1)}{24n^2(n+1)^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)=\frac{e}{2}\cdot\frac{n}{n+1}+o(1),\end{aligned}$$

4. НЕПРЕКИДНОСТ

1. Нека је $\lambda > 0$ и $f(x) = 1 + \frac{1}{2^\lambda} + \ldots + \frac{1}{[x]^\lambda} - \frac{[x]}{x^\lambda}$ за $x \geqslant 1$. Испитати непрекидност функције f на интервалу $[1, \infty)$.

Решење. Функција f је на сваком интервалу $[n, n+1)$ за $n \in \mathbb{N}$ добро дефинисана и непрекидна (као композиција непрекидних функција), тј. непрекидна је сдесна (за свако $x \in [1, \infty)$ важи $\lim\limits_{t \to x+} f(t) = f(x)$). Из истог разлога, функција је непрекидна на сваком од интервала $(n, n+1)$ за $n \in \mathbb{N}$.
Коначно, функција f је непрекидна и слева у целобројним тачкама, јер за $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ важи $f(n) = 1 + \frac{1}{2^\lambda} + \ldots + \frac{1}{n^\lambda} - \frac{n}{n^\lambda}$ и $\lim\limits_{t \to n-} f(t) = \Big(1 + \frac{1}{2^\lambda} + \ldots + \frac{1}{(n-1)^\lambda} - \frac{n-1}{t^\lambda}\Big) = 1 + \frac{1}{2^\lambda} + \ldots + \frac{1}{(n-1)^\lambda} - \frac{n-1}{n^\lambda}$, тј. $f(n) = \lim\limits_{t \to n-} f(t)$ за $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.
Дакле, функција f је непрекидна на $[1, \infty)$.

2. Нека су $a, m, n \in \mathbb{R}$, $n > 0$.

(а) Израчунати $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos^3 ax}{x^2}$. (б) Израчунати $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{mx} - 1}{\operatorname{tg} nx}$.

(в) Израчунати $\lim\limits_{x \to 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$.

(г) Наћи $\alpha, \beta > 0, a$ и b, такве да је функција

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos^3 \alpha(x+1)}{(x+1)^2}, & \text{за } x < -1 \\ a, & \text{за } x = -1 \\ \frac{e^{x+1} - 1}{\operatorname{tg} \beta(x+1)}, & \text{за } -1 < x < 0 \\ b, & \text{за } x = 0 \\ (\cos x)^{-\frac{2}{\sin^2 x}} - 1, & \text{за } x > 0 \end{cases}$$

непрекидна на $\mathbb{R}$.

Решење. (а) Како $ax \to 0$ и $\frac{a^2 x^2}{2} + o(x^2) \to 0$ кад $x \to 0$, следи

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} \frac{1 - \left(1 - \frac{a^2 x^2}{2} + o(x^2)\right)^3}{x^2} &= \lim_{x \to 0} \frac{1 - \left(1 - \frac{3}{2} \cdot a^2 x^2 + o(x^2)\right)}{x^2} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{3}{2} \cdot a^2 x^2 + o(x^2)}{x^2} = \frac{3}{2} \cdot a^2. \end{aligned}$$

(б) За свако $n > 0$, ако је $|x| < \dfrac{\pi}{2n}, |x| \neq 0$, дати израз је дефинисан, па дата гранична вредност постоји. Како $mx \to 0$ и $nx \to 0$ кад $x \to 0$, следи $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{mx} - 1}{\operatorname{tg} nx} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 + mx + o(x) - 1}{nx + o(x)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{m + o(1)}{n + o(1)} = \dfrac{m}{n}$.

5. ДИФЕРЕНЦИЈАБИЛНОСТ

1. Нека је $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1}, & \text{за } x \neq 0 \\ a, & \text{за } x = 0 \end{cases}$.

(а) Одредити a тако да функција f буде непрекидна у нули.
(б) Испитати егзистенцију првог и другог извода функције f у нули.

Решење. (а) Функција f је непрекидна у нули ако и само ако важи $f(0) = \lim\limits_{x\to 0} f(x)$, па следи $a = f(0) = \lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{e^x-1} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{x+o(x)} = 1$.
(б) По дефиницији првог извода и делу (а) је

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x}{e^x-1} - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x - e^x + 1}{x(e^x-1)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{x - 1 - x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) + 1}{x(1+x+o(x)-1)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} = -\frac{1}{2}, \end{aligned}$$

па је функција дефинисана у (а) диференцијабилна у нули. Она је диференцијабилна и за $x \neq 0$ и за такво x важи $f'(x) = \frac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x-1)^2}$, па је

$$\begin{aligned} f''(0) &= \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)-f'(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - xe^x + \frac{1}{2}(e^x-1)^2}{x(e^x-1)^2} \\ &= \lim_{x\to 0} \Bigg[\frac{1}{x\Big(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - 1\Big)^2} \cdot \Big[1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \\ &\quad -1 - x\Big(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\Big) + \frac{1}{2} \cdot \Big(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - 1\Big)^2 \Big] \Bigg] \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3) + \frac{1}{2}\left(x^2 + x^3 + o(x^3)\right)}{x\left(x^2 + o(x^2)\right)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x^3 + o(x^3)} = \frac{1}{6}, \end{aligned}$$

па је функција дефинисана у (а) два пута диференцијабилна у нули.

2. Одредити све $\alpha \in \mathbb{R}$ за које се функција $f(x) = \frac{\sin|x|}{|x|^\alpha}$ може додефинисати у тачки $x = 0$, тако да буде непрекидно–диференцијабилна на $\mathbb{R}$.

Решење. Ако је $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, функција је бесконачно диференцијабилна (па и непрекидно–диференцијабилна). Како је $f(x) = \frac{\sin|x|}{|x|^\alpha} \sim \frac{|x|}{|x|^\alpha} = \frac{1}{|x|^{\alpha-1}}$ кад $x \to 0$, следи да се за $\alpha > 1$ функција не може додефинисати у нули тако да буде непрекидна (самим тим ни непрекидно–диференцијабилна), за $\alpha = 1$ је по непрекидности $f(0) = 1$, а за $\alpha < 0$ је $f(0) = 0$.

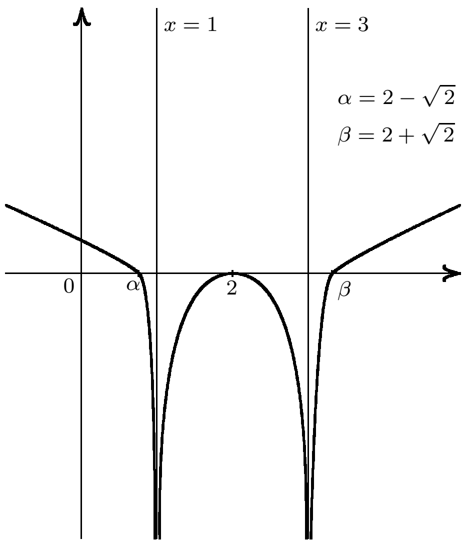
6. ИСПИТИВАЊЕ ФУНКЦИЈА

1. Испитати ток и нацртати график функције $f(x) = \ln|x^2 - 4x + 3|$.

Решење. *Домен*: мора бити $|x^2-4x+3| > 0$, тј. $x \neq 1, 3$, па је $Dom(f) = (-\infty, 1) \cup (1, 3) \cup (3, \infty)$. Домен није симетричан у односу на 0, па f није ни парна ни непарна. Како је $|\mathbb{R} \setminus Dom(f)| = 2$, следи да f не може бити ни периодична.

Нуле и знак: важи $\ln|x^2 - 4x + 3| > 0 \Leftrightarrow |x^2 - 4x + 3| > 1$. На $(-\infty, 1) \cup (3, \infty)$ последња неједначина је еквивалентна са $x^2-4x+2 > 0$, тј. $x \in (-\infty, 1) \cup (3, \infty)$ и $x \in (-\infty, 2 - \sqrt{2}) \cup (2 + \sqrt{2}, \infty)$, односно $x \in (-\infty, 2 - \sqrt{2}) \cup (2 + \sqrt{2}, \infty)$. На $(1, 3)$ последња неједначина је еквивалентна са $-(x^2 - 4x + 3) < -1$, тј. $x^2 - 4x + 2 > 0$, па је $x \in (1, 3)$ и $x \in (-\infty, 2 - \sqrt{2}) \cup (2 + \sqrt{2}, \infty)$, односно $x \in \emptyset$. Дакле, $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 2 - \sqrt{2}) \cup (2 + \sqrt{2}, \infty)$. Слично се добија да важи $f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}\}$ и $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (2 - \sqrt{2}, 1) \cup (1, 3) \cup (3, 2 + \sqrt{2})$.

График:



Први извод: на $Dom(f)$ важи $f'(x) = \frac{2x-4}{x^2-4x+3} = 2 \cdot \frac{x-2}{(x-1)(x-3)}$. Следи $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$, $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (1, 2) \cup (3, \infty)$, $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1) \cup (2, 3)$.

7. ТЕХНИКЕ ИНТЕГРАЉЕЊА ЕЛЕМЕНТАРНИХ ФУНКЦИЈА

1. Израчунати $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(x+\sqrt{x^2+1})^2}$.

Решење. Подинтегрална функција је непрекидна, па дати интеграл постоји. Следи

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{dx}{(x+\sqrt{x^2+1})^2} &= \int_0^1 \frac{1}{(x+\sqrt{x^2+1})^2}\cdot\frac{(x-\sqrt{x^2+1})^2}{(x-\sqrt{x^2+1})^2}\,dx\\
&= \int_0^1 (x-\sqrt{x^2+1})^2 dx = \int_0^1 \Big(2x^2+1-2x\sqrt{x^2+1}\Big)\,dx\\
&= \left[\frac{2x^3}{3}+x-\frac{2}{3}\cdot\Big(x^2+1\Big)^{\frac{3}{2}}\right]\Bigg|_0^1 = 1+\frac{2}{3}-\frac{4\sqrt{2}}{3}+\frac{2}{3}=\frac{7-4\sqrt{2}}{3}\,.
\end{aligned}$$

Друго решење.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{dx}{(x+\sqrt{x^2+1})^2} &= \left\{\begin{array}{c}\textit{смена } x=\operatorname{sh} t\\ dx=\operatorname{ch} t dt\end{array}\right\} = \int_0^{\ln(1+\sqrt{2})} \frac{\operatorname{ch} t}{(\operatorname{sh} t+\operatorname{ch} t)^2}\,dt\\
&= \int_0^{\ln(1+\sqrt{2})} \frac{\frac{e^t+e^{-t}}{2}}{e^{2t}}\,dt = \frac{1}{2}\cdot\int_0^{\ln(1+\sqrt{2})}\Big(e^{-t}+e^{-3t}\Big)dt\\
&= \left[-e^{-t}-\frac{e^{-3t}}{3}\right]\Bigg|_0^{\ln(1+\sqrt{2})} = \frac{1}{2}\cdot\Big[\frac{4}{3}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(\sqrt{2}+1)^3}\Big]\\
&= \frac{1}{6}\cdot\Big[4-3(\sqrt{2}-1)-(\sqrt{2}-1)^3\Big] = \frac{7-4\sqrt{2}}{3}\,.
\end{aligned}$$

2. Израчунати $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x+1}+\sqrt{x+1}}\,dx$.

Решење. Подинтегрална функција је непрекидна на $[0,1]$, па дати интеграл постоји. Следи

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x+1}+\sqrt{x+1}}\,dx &= \left\{\begin{array}{c}\textit{смена } x+1=t^6\\ dx=6t^5dt\end{array}\right\} = \int_1^{\sqrt[6]{2}} \frac{t^2-t^3}{t^2+t^3}\cdot 6t^5dt\\
&= (-6)\cdot\int_1^{\sqrt[6]{2}}\frac{t^6-t^5}{t+1}\,dt = (-6)\cdot\int_1^{\sqrt[6]{2}}\Big(t^5-2t^4+2t^3-2t^2+2t-2\\
&\quad +\frac{2}{t+1}\Big)dt = (-6)\Big[\frac{t^6}{6}-\frac{2t^5}{5}+\frac{2t^4}{4}-\frac{2t^3}{3}+\frac{2t^2}{2}-2t+2\ln|t+1|\Big]\Bigg|_1^{\sqrt[6]{2}}
\end{aligned}$$

8. ИНТЕГРАЛИ

1. Израчунати површину коначне области ограничене кривом

$$(y-2x^2)^2+x^2=2.$$

Решење. Скуп $\Big\{(x,y)\mid (y-2x^2)^2+x^2\geqslant 2\Big\}$ је неограничен, па је скуп чија се површина тражи $S=\Big\{(x,y)\mid (y-2x^2)^2+x^2\leqslant 2\Big\}$. Како је квадрат реалног броја ненегативан, следи $x^2\leqslant 2, (y-2x^2)^2\leqslant 2$. Из прве неједнакости следи да је x–координата тачака скупа S ограничена, а из друге неједнакости тада следи и ограниченост y–координате, па је површина области S коначна. Следи

$$S=\Big\{(x,y)\mid -\sqrt{2}\leqslant x\leqslant \sqrt{2}\,,\,-\sqrt{2-x^2}+2x^2\leqslant y\leqslant \sqrt{2-x^2}+2x^2\Big\}\,,\text{тј.}$$

$$\begin{aligned}
P(S) &= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\Big(\Big(\sqrt{2-x^2}+2x^2\Big)-\Big(-\sqrt{2-x^2}+2x^2\Big)\Big)\,dx\\
&= 2\cdot\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\sqrt{2-x^2}dx=\left\{\begin{array}{c}\textit{смена}\ \ x=\sqrt{2}\sin t\\ dx=\sqrt{2}\cos t dt\end{array}\right\}\\
&= 2\cdot\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2-2\sin^2 t}\cdot(\sqrt{2}\cos t dt)=4\cdot\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\cos t|\cdot\cos t dt.
\end{aligned}$$

Како је функција $\cos x$ ненегативна на интервалу $\Big[-\dfrac{\pi}{2}\,,\dfrac{\pi}{2}\Big]$, следи

$$P(S)=4\cdot\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t dt=4\cdot\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt=2\cdot\left[t+\frac{\sin 2t}{2}\right]\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=2\pi.$$

2. Израчунати површину дела коначне површине ограниченог кривим $y=e^{x^2}+\cos x$ и $y=x^2-\frac{\pi^2}{4}+e^{x^2}$ у xOy равни.

Решење. Пресечне тачке кривих су $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ и $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$ и међу областима на које је раван подељена овим кривим постоји тачно једна ограничене површине: $\Big\{(x,y)\mid -\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant \frac{\pi}{2}, x^2-\frac{\pi^2}{4}+e^{x^2}\leqslant y\leqslant e^{x^2}+\cos x\Big\}$. Њена површина је $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\Big(\Big(e^{x^2}+\cos x\Big)-\Big(x^2-\frac{\pi^2}{4}+e^{x^2}\Big)\Big)dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\Big(\cos x+\frac{\pi^2}{4}-x^2\Big)dx=\Big[\sin x+\frac{\pi^2}{4}x-\frac{x^3}{3}\Big]\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=2+\frac{\pi^2}{6}.$

9. РЕДОВИ

1. Испитати конвергенцију реда $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^a \sin\frac{1}{n^b} \ln\frac{n+1}{n}$, у зависности од $a \in \mathbb{R}$ и $b \in \mathbb{R}^+$.

Решење. Како $\frac{1}{n^b} \to 0$ кад $n \to \infty$, дати ред је, почев од неког члана, са позитивним члановима. Како је $n^a \sin\frac{1}{n^b} \ln\frac{n+1}{n} \sim n^a \cdot \frac{1}{n^b} \cdot \ln\Big(1+\frac{1}{n}\Big) = n^{a-b} \cdot \frac{1}{n} = n^{a-b-1}$ кад $n \to \infty$, по поредбеном критеријуму дати ред конвергира за $b > a$, а дивергира за $b \leqslant a$.

2. Испитати конвергенцију реда $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}}{(\ln n)^p}$ у зависности од реалног параметра p.

Решење. Како је $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, следи $1-\cos\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big) = 1-\Big(1-\frac{1}{2n}+o\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big) = \frac{1}{2n}+o\Big(\frac{1}{n}\Big)$ кад $n \to \infty$, па важи $\dfrac{1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}}{(\ln n)^p} \sim \dfrac{\frac{1}{2n}}{\ln^p n} = \dfrac{1}{2n\ln^p n}$ кад $n \to \infty$. Дакле, ред $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}}{(\ln n)^p}$ (са позитивним члановима) конвергира (по поредбеном критеријуму) ако и само ако је $p > 1$.

3. Испитати конвергенцију реда $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \Big[\Big(1+\frac{1}{n^\alpha}\Big)^{n^\alpha} - e\Big]$ у зависности од $\alpha \in \mathbb{R}$.

Решење. Ако је $\alpha < 0$, онда је $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\Big(1+\frac{1}{n^\alpha}\Big)^{n^\alpha} = \lim_{n\to\infty} e^{n^\alpha\cdot\ln\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)} = \lim_{m\to\infty} e^{\frac{\ln(1+m)}{m}} = 1$ (e^x је непрекидна функција), па општи члан реда не тежи нули. Такође, ако је $\alpha = 0$, општи члан реда је $2-e$ и не тежи нули кад $n \to \infty$, па за $\alpha \leqslant 0$ дати ред дивергира.
Нека је $\alpha > 0$. Чланови полазног реда су негативни бројеви, јер је $\Big(1+\frac{1}{x}\Big)^x < e$ за $x > 0$, па дати ред конвергира ако и само ако конвергира ред $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\Big[e-\Big(1+\frac{1}{n^\alpha}\Big)^{n^\alpha}\Big]$. Како је

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{e-\Big[\Big(1+\frac{1}{n^\alpha}\Big)^{n^\alpha}\Big]}{\frac{1}{n^\alpha}} &= \lim_{n\to\infty} n^\alpha \cdot \Big[e - e^{n^\alpha\cdot\left(\frac{1}{n^\alpha}-\frac{1}{n^{2\alpha}}+o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)\right)}\Big] \\
&= \lim_{n\to\infty} e\cdot n^\alpha \cdot \Big[1-1+\frac{1}{n^\alpha}+o\Big(\frac{1}{n^\alpha}\Big)\Big] = e,
\end{aligned}
$$

ISBN 978-86-7589-190-1