Кртинић Ђорђе

МАТЕМАТИКА 1 & 2

ЗА СТУДЕНТЕ ФИЗИЧКОГ ФАКУЛТЕТА

Математички факултет у Београду

Математички факултет у Београду

Математика 1 & 2

за студенте Физичког факултета

Б Е О Г Р А Д
2025.

Садржај

Материјал првих 6 глава чини садржај првог дела курса (први семестар прве године), а наредних 5 глава другог дела курса (други семестар прве године основних студија) Математике на Физичком факултету, по тренутно важећем плану и програму. У наставку је изложен кратак опис садржаја сваке од глава.

У првој, уводној, глави, приказани су основни делови опште математике, потребни за даље праћење текста. Највише пажње је усмерено ка дефинисању појма релације, функције и операције, а посебно на релације еквиваленције и поретка, основне особине апстрактних функција, допуну полугрупе до групе, као и конструкције одговарајуће количничке структуре и (уређеног) поља рационалних бројева из структуре природних бројева. Укратко су наведене и друге алгебарске структуре које се јављају у наставку текста, но уобичајно је да се делови ове главе понове на настави када дође до потребе за њима.

Друга глава се бави првим законитостима које се могу добити у структури реалних бројева. Дефинисана је тополошка структура, приказани еквиваленти аксиоме супремума (на самој настави се акценат баца на показивање да су поменута тврђења последице те аксиоме, но у самом тексту је показано да су у питању и еквиваленти). Након тога, дефинисана је степена функција (на скупу позитивних реалних бројева), као и експоненцијална и логаритамска функција, а приказано је и поље комплексних бројева, као и нормиран векторски простор. Коначно, показан је принцип математичке индукције, чији су различити облици пропраћени примерима типичним за даље примене, а наведене су и основне особине кардиналних бројева (са нагласком на коначну, као и кардиналности $\aleph_0$ и c).

Централни део првог дела курса чине наредне четири главе. У трећој су испитиване тачке нагомилавања низа реалних бројева, као и гранична вредност таквог низа. Утврђени су довољни услови егзистенције такве граничне вредности, као и основна правила њеног одређивања, а показана је и (једна од) конструкција поља реалних бројева.

У четвртој глави су проучени појмови граничне вредности реалне функције реалне промењиве, као и непрекидности такве функције, а испитани су и њихови односи са основним особинама функција. Показана су и (локална и глобална) својства непрекидних функција, а приказане су и неке од примена добијених резултата (између осталог, дефинисане су елементарне функције, а посебна пажња је обраћена на асимптотско понашање функција).

Тема пете главе је диференцијабилност реалне функције реалне промењиве. Уведен је појам (првог и виших) извода, испитано под којим условима постоји, наведене последице и неке примене (пре свега геометријске, као и приликом одређивања граничних вредности).

У шестој глави је приказан концепт интеграције у $\mathbb{R}$, прво кроз појам неодређеног интеграла (у том делу је акценат бачен на развој техника интеграције одговарајућих класа функција), а након тога је приказана конструкција Римановог интеграла, његове особине и везе са диференцирањем. У последњем делу су приказана нека његова уопштења и примене, а, због потребе програма на Физичком факултету, и методе решавања неких диференцијалних једначина првог реда. Приликом обраде примена Римановог интеграла се, на самој настави, обично даје предност геометријским применама, док се материја посвећена Риман–Стилтјесовом интегралу, несвојственом интегралу, као и функцијама ограничене варијације, излаже у мери у којој време то дозвољава, но последње поменути резултати се обично детаљније обрађују у каснијим деловима овог и наредних курсева, када се укаже потреба њихове примене. На пример, функције ограничене варијације се обично детаљније обрађују у трећем, а несвојствени интеграли који нису и апсолутно конвергентни у четвртом делу курса, но та материја је приказана у овој глави, пошто јој природно припада.

У седмој глави су приказани основни елементи линеарне алгебре. Показане су основне особине линеарних пресликавања (између векторских простора), основне операције на матрицама, дефинисан појам детерминанте и описана њена својства. Након тога су обрађене методе решавања система линеарних једначина, показани основни елементи геометрије Еуклидских простора, као и аналитичке геометрије у две и три димензије. Услед предвиђеног времена за излагање ове материје, део посвећен опису класа еквиваленције сличности матрица је минимизован, често се виђа и да се ти делови материјала излажу у оквиру трећег дела курса (Математике на Физичком факултету), када се појави већа потреба њихове примене (рецимо, приликом описа облика решења система диференцијалних једначина, као и решавања система линеарних диференцијалних једначина), а додатни разлог је и то што се ти делови у међувремену обрађују и у оквиру математичке физике.

Осма глава садржи основне резултате везане за својства непрекидних пресликавања. Овде је то урађено у случају пресликавања између метричких простора, а посебна пажња је посвећена случају нормираних простора. Како се потреба за резултатима овог дела на даље јавља у више наврата, често се неки од њих поново презентују у оквиру наставе и на каснијим деловима курса (попут тврђења о егзистенцији фиксне тачке, које је овде приказано у облику у ком се најчешће јавља по литератури, као и резултата везаних за компактност).

У деветој глави је размотрен појам извода за пресликавања из $\mathbb{R}^n$ у $\mathbb{R}^m$. Заправо, показано је да се диференцирање природно дефинише за пресликавања на нормираним векторским просторима, те, иако је основни циљ главе разматрање пресликавања између Еуклидских простора, у мери у којој је то било могуће су тврђења и докази приказани у облику који се директно прилагођавају општијој ситуацији. Показане су и идеје које допуњују резултате о диференцијалним једначинама првог реда приказани у шестој глави (попут одређивања интеграционог множиоца диференцијалне једначине), а показан је и низ примена (попут одређивања екстремних вредности диференцијабилне реалне функције више промењљивих). У другом делу главе, у мери у којој је простор то дозволио, приказани су резултати везани за испитивање имплицитно дефинисаних (глатких) пресликавања, при чему је избор примена углавном вршен по потребама даљег текста.

Десета глава садржи конструкцију Жорданове мере у $\mathbb{R}^n$, као и Римановог интеграла (реалне функције, чији је домен садржан у $\mathbb{R}^n$).

У једанаестој глави су разматране регуларне површи у $\mathbb{R}^n$, интеграли дефинисани на њима, као и односи између различитих врста тако добијених интеграла. Показани су и резултати везани за покретни координатни систем. На самој настави се овде акценат баца на приказ интеграције у $\mathbb{R}^3$ (тј. по регуларним кривим и по површима димензије 2), те је тај део издвојен у засебну целину (опет су тврђења, док год то није изазивало техничке компликације, навођена у облику који је погодан за примену и у ширем оквиру), а у последњем делу је представљено једно од уопштења приказаних резултата. На настави је уобичајно да се прва два дела ове главе детаљно изложе, а последњи прикаже информативно, обично у обиму који зависи од интересовања слушалаца (овде је то урађено у облику у ком је то најчешће рађено), у циљу бољег разумевања и потпунијег сагледавања добијених резултата.

9 788676 804887