

Кртинић Ђорђе

МАТЕМАТИКА 1 & 2
ЗА СТУДЕНТЕ ФИЗИЧКОГ ФАКУЛТЕТА

Математички факултет у Београду

Математички факултет у Београду

Математика 1 & 2

за студенте Физичког факултета

Б Е О Г Р А Д
2025.

Садржај

Садржај	i
Предговор	v
1. Увод	1
1.1. Скупови, релације	4
Релација еквиваленције	7
Релација поретка, инфимум и супремум скупа	9
1.2. Функције	12
1.3. Основне алгебарске структуре	20
Природни бројеви	20
Група, прстен	23
Потпуно уређено поље	31
Векторски простор	35
2. Поље реалних бројева	37
2.1. Поље реалних бројева, аксиома супремума и њене последнице	37
Архимедово својство	39
Проширени скуп реалних бројева	41
Отворени и затворени скупови у \mathbb{R}	41
Еквиваленти својства супремума	44
Декадни систем	48
2.2. Експоненцијална функција	50
2.3. Комплексни бројеви	52
Нормиран векторски простор	55
2.4. Математичка индукција	56
2.5. Кардинални бројеви	62
3. Конвергенција реалних низова	71
3.1. Гранична вредност низа	71
Лема о два полицајца	77
Монотони низови, број e	80
Кошијеви низови	82
Конструкција поља реалних бројева	84
3.2. Тачке нагомилавања реалног низа	87
Штолцова теорема	95
4. Непрекидност реалне функције реалне променљиве	99
4.1. Гранична вредност реалне функције	99

4.2. Својства реалних функција	106
Ограниченост	106
Монотоност	108
Парност и непарност	111
Периодичност	112
Нуле и знак	115
Конвексност	116
4.3. Својства непрекидних реалних функција	120
Глобална својства непрекидних функција	122
Непрекидност монотоне функције	128
Кошијева функционална једначина	131
Елементарне функције	136
Класификација бесконачно малих и бесконачно великих величина	148
Асимптоте реалних функција	153
5. Диференцијабилност реалне функције реалне променљиве	157
5.1. Дефиниција и основна својства извода	158
Извод сложене функције	161
Извод инверзне функције	162
Изводи елементарних функција	163
Леви и десни извод функције	164
Диференцијал функције	165
Тангента и нормала графика функције	166
Теореме средње вредности	167
5.2. Изводи вишег реда	171
Вишеструкост нула полинома	176
5.3. Примене извода	180
Испитивање монотоности функција	180
Испитивање конвексности функција	184
Лопиталова правила	186
Тејлоров полином	190
Параметарски дефинисана функција	198
Испитивање тока и скицирање графика функције	202
6. Интеграција реалне функције реалне променљиве	213
6.1. Примитивна функција и неодређени интеграл	213
Смена променљиве у неодређеном интегралу	216
Парцијална интеграција у случају неодређеног интеграла	218
Интеграција рационалних функција	221
Интегрални функција који се свде на интеграцију рационалних функција	223
Интеграција неких ирационалних функција	225
6.2. Риманов интеграл	227
Класе интеграбилних функција	233
Особине интеграла	238
Веза између извода и одређеног интеграла	243

6.3.	Уопштења и примене Римановог интеграла	256
	Функције ограничене варијације	256
	Несвојствени Риманов интеграл	261
	Риман–Стилтјесов интеграл	270
	Примене Римановог интеграла у геометрији	278
	Диференцијалне једначине првог реда	290
7.	Увод у линеарну алгебру	305
7.1.	Линеарна пресликавања векторских простора	305
	Простор линеарних пресликавања	312
7.2.	Алгебра матрица	317
	Еквивалентност матрица	329
7.3.	Детерминанте	334
	Карактеристични полином	349
7.4.	Метод решивања система линеарних једначина	359
7.5.	Еуклидски векторски простори	368
	Реалне квадратне форме	379
7.6.	Аналитичка геометрија у \mathbb{R}^2 и \mathbb{R}^3	383
	Једначина праве у \mathbb{R}^2	385
	Векторски и мешовити производ у \mathbb{R}^3	389
	Једначина праве и равни у \mathbb{R}^3	393
	Криве другог реда у \mathbb{R}^2	397
8.	Метрички простори	405
8.1.	Топологија метричког простора	406
8.2.	Конвергенција у метричком простору	415
	Комплетност метричког простора	422
	Егзистенција фиксне тачке пресликавања	428
	Норма на простору линеарних пресликавања	430
8.3.	Компактност у метричком простору	435
	Компактност и непрекидност	442
8.4.	Повезаност у метричком простору	448
9.	Диференцијални рачун у \mathbb{R}^n	455
9.1.	Извод у \mathbb{R}^n	456
	Парцијални изводи	459
	Теорема средње вредности	464
	Непрекидно диференцијабилна пресликавања	468
	Диференцијални рачун у нормираним векторским просторима	473
	Изводи вишег реда	477
	Локални екстремуми функција више променљивих	494
9.2.	Имплицитно дефинисана пресликавања	503
	Ранг глатког пресликавања у \mathbb{R}^n	517
10.	Интеграција у \mathbb{R}^n	533
10.1.	Жорданова мера у \mathbb{R}^n	533
10.2.	Риманов интеграл у \mathbb{R}^n	539
	Интеграција на производу простора	547
10.3.	Смена променљиве у Римановом интегралу у \mathbb{R}^n	551

Поларне и цилиндричне координате	556
Сферне координате	559
10.4. Несвојствени Риманов интеграл у \mathbb{R}^n	562
11. Интеграција по површи у \mathbb{R}^n	569
11.1. Регуларне површи	570
Криве у \mathbb{R}^n	570
Површи у \mathbb{R}^n	584
Векторска анализа у \mathbb{R}^3	600
11.2. Интегрални у \mathbb{R}^n и односи међу њима	602
Криволинијски интеграл	603
Однос између двоструког и криволинијског инте-	
грала у \mathbb{R}^2	611
Интеграција по регуларној хиперповрши у \mathbb{R}^n	616
Основне формуле интегралног рачуна у \mathbb{R}^3	620
11.3. Интеграција диференцијалних форми у \mathbb{R}^n	625
Диференцијалне форме и операције на њима	626
Диференцијабилни симплекси и ланци	631
Општа Стоксова теорема	635
Литература	639



Материјал првих 6 глава чини садржај првог дела курса (први семестар прве године), а наредних 5 глава другог дела курса (други семестар прве године основних студија) Математике на Физичком факултету, по тренутно важећем плану и програму. У наставку је изложен кратак опис садржаја сваке од глава.

У првој, уводној, глави, приказани су основни делови опште математике, потребни за даље праћење текста. Највише пажње је усмерено ка дефинисању појма релације, функције и операције, а посебно на релације еквиваленције и поретка, основне особине апстрактних функција, допуну полугрупе до групе, као и конструкције одговарајуће количничке структуре и (уређеног) поља рационалних бројева из структуре природних бројева. Укратко су наведене и друге алгебарске структуре које се јављају у наставку текста, но уобичајно је да се делови ове главе понове на настави када дође до потребе за њима.

Друга глава се бави првим законитостима које се могу добити у структури реалних бројева. Дефинисана је тополошка структура, приказани еквиваленти аксиоме супремума (на самој настави се акценат баца на показивање да су поменути тврђења последице те аксиоме, но у самом тексту је показано да су у питању и еквиваленти). Након тога, дефинисана је степена функција (на скупу позитивних реалних бројева), као и експоненцијална и логаритамска функција, а приказано је и поље комплексних бројева, као и нормиран векторски простор. Коначно, показан је принцип математичке индукције, чији су различити облици пропраћени примерима типичним за даље примене, а наведене су и основне особине кардиналних бројева (са нагласком на коначну, као и кардиналности \aleph_0 и c).

Централни део првог дела курса чине наредне четири главе. У трећој су испитиване тачке нагомилавања низа реалних бројева, као и гранична вредност таквог низа. Утврђени су довољни услови егзистенције такве граничне вредности, као и основна правила њеног одређивања, а показана је и (једна од) конструкција поља реалних бројева.

У четвртој глави су проучени појмови граничне вредности реалне функције реалне променљиве, као и непрекидности такве функције, а испитани су и њихови односи са основним особинама функција. Показана су и (локална и глобална) својства непрекидних функција, а приказане су и неке од примена добијених резултата (између осталог, дефинисане су елементарне функције, а посебна пажња је обрађена на асимптотско понашање функција).

Тема пете главе је диференцијабилност реалне функције реалне променљиве. Уведен је појам (првог и виших) извода, испитано под којим условима постоји, наведене последице и неке примене (пре свега геометријске, као и приликом одређивања граничних вредности).

У шестој глави је приказан концепт интеграције у \mathbb{R} , прво кроз појам неодређеног интеграла (у том делу је акценат бачен на развој техника интеграције одговарајућих класа функција), а након тога је приказана

конструкција Римановог интеграла, његове особине и везе са диференцирањем. У последњем делу су приказана нека његова уопштења и примене, а, због потребе програма на Физичком факултету, и методе решавања неких диференцијалних једначина првог реда. Приликом обраде примена Римановог интеграла се, на самој настави, обично даје предност геометријским применама, док се материја посвећена Рима-н-Стилтјесовом интегралу, несвојственом интегралу, као и функцијама ограничене варијације, излаже у мери у којој време то дозвољава, но последње поменути резултати се обично детаљније обрађују у каснијим деловима овог и наредних курсева, када се укаже потреба њихове примене. На пример, функције ограничене варијације се обично детаљније обрађују у трећем, а несвојствени интеграл који нису и апсолутно конвергентни у четвртом делу курса, но та материја је приказана у овој глави, пошто јој природно припада.

У седмој глави су приказани основни елементи линеарне алгебре. Показане су основне особине линеарних пресликавања (између векторских простора), основне операције на матрицама, дефинисан појам детерминанте и описана њена својства. Након тога су обрађене методе решавања система линеарних једначина, показани основни елементи геометрије Еуклидских простора, као и аналитичке геометрије у две и три димензије. Услед предвиђеног времена за излагање ове материје, део посвећен опису класа еквиваленције сличности матрица је минимизован, често се виђа и да се ти делови материјала излажу у оквиру трећег дела курса (Математике на Физичком факултету), када се појави већа потреба њихове примене (рецимо, приликом описа облика решења система диференцијалних једначина, као и решавања система линеарних диференцијалних једначина), а додатни разлог је и то што се ти делови у међувремену обрађују и у оквиру математичке физике.

Осма глава садржи основне резултате везане за својства непрекидних пресликавања. Овде је то урађено у случају пресликавања између метричких простора, а посебна пажња је посвећена случају нормираних простора. Како се потреба за резултатима овог дела на даље јавља у више наврата, често се неки од њих поново презентују у оквиру наставе и на каснијим деловима курса (попут тврђења о егзистенцији фиксне тачке, које је овде приказано у облику у ком се најчешће јавља по литератури, као и резултата везаних за компактност).

У деветој глави је размотрен појам извода за пресликавања из \mathbb{R}^n у \mathbb{R}^m . Заправо, показано је да се диференцирање природно дефинише за пресликавања на нормираним векторским просторима, те, иако је основни циљ главе разматрање пресликавања између Еуклидских простора, у мери у којој је то било могуће су тврђења и докази приказани у облику који се директно прилагођавају општијој ситуацији. Показане су и идеје које допуњују резултате о диференцијалним једначинама првог реда приказани у шестој глави (попут одређивања интеграционог множиоца диференцијалне једначине), а показан је и низ примена (попут одређивања екстремних вредности диференцијабилне ре-

лне функције више променљивих). У другом делу главе, у мери у којој је простор то дозволио, приказани су резултати везани за испитивање имплицитно дефинисаних (глатких) пресликавања, при чему је избор примена углавном вршен по потребама даљег текста.

Десета глава садржи конструкцију Жорданове мере у \mathbb{R}^n , као и Римановог интеграла (реалне функције, чији је домен садржан у \mathbb{R}^n).

У једанаестој глави су разматране регуларне површи у \mathbb{R}^n , интеграл дефинисани на њима, као и односи између различитих врста тако добијених интеграла. Показани су и резултати везани за покретни координатни систем. На самој настави се овде акценат баца на приказ интеграције у \mathbb{R}^3 (тј. по регуларним кривим и по површима димензије 2), те је тај део издвојен у засебну целину (опет су тврђења, док год то није изазивало техничке компликације, навођена у облику који је погодан за примену и у ширем оквиру), а у последњем делу је представљено једно од уопштења приказаних резултата. На настави је уобичајно да се прва два дела ове главе детаљно изложе, а последњи прикаже информативно, обично у обиму који зависи од интересовања слушалаца (овде је то урађено у облику у ком је то најчешће рађено), у циљу бољег разумевања и потпунијег сагледавања добијених резултата.



9788676804887